

Exercice 1

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$ | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$ | (9) $(P \vee (Q \vee R))$ |
| (2) $P \vee (Q)$ | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | (10) $\neg P \vee Q \vee R$ |
| (3) $\neg(Q)$ | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$ | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ | (12) $(P \vee P)$ |

..... Corrigé

- | | | | | | |
|-----------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| (1) $\neg(\neg P \vee Q)$ | OUI | (5) $(P \rightarrow ((P \rightarrow Q)))$ | NON | (9) $(P \vee (Q \vee R))$ | OUI |
| (2) $P \vee (Q)$ | NON | (6) $((P \rightarrow P) \rightarrow (Q \rightarrow Q))$ | OUI | (10) $\neg P \vee Q \vee R$ | NON |
| (3) $\neg(Q)$ | NON | (7) $((P_{28} \rightarrow P_3) \rightarrow P_4)$ | OUI | (11) $(\neg P \vee \neg\neg P)$ | OUI |
| (4) $(P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow (P_2 \rightarrow P_2)))$ | OUI | (8) $(P \rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$ | NON | (12) $(P \vee P)$ | OUI |

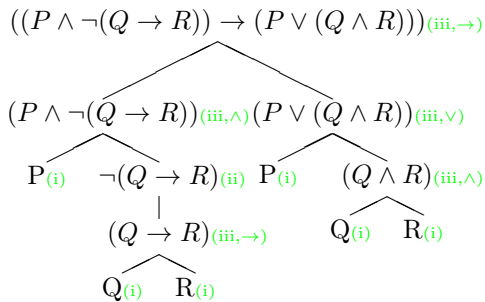
N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèses la plus externe mais en toute rigueur, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

De même, pour les connecteurs associatifs (comme \wedge et \vee), il arrive qu'on néglige d'autres parenthèses lorsque la position des parenthèses absentes n'a pas d'incidence sur la valeur de la formule. Par exemple on écrira $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, car les deux paires parenthèses manquantes peuvent être placées de n'importe quelle manière syntaxiquement correcte sans conséquence.

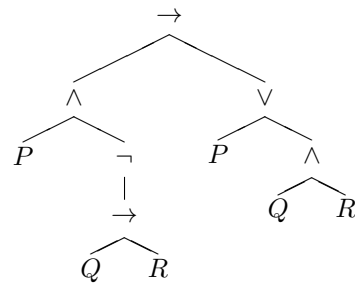
Exercice 2

Montrez que la formule suivante est une formule bien formée du calcul propositionnel en donnant son arbre de décomposition : $((P \wedge \neg(Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \vee (Q \wedge R)))$.

..... Corrigé



version plus légère :



Exercice 3

Les phrases (1-a) et (1-b) sont-elles contraires, contradictoires, ou ni l'un ni l'autre? Justifiez votre réponse.

- (1) a. Il ne suffit pas d'avoir de bons légumes pour faire une bonne soupe.
 b. Si la soupe est mauvaise, les légumes sont mauvais.

..... Corrigé

On suppose que les propositions élémentaires sont d'une part *la soupe est bonne* (S) et d'autre part *les légumes sont bons* (L). On suppose de plus que la proposition *les légumes sont mauvais* est équivalente à *les légumes ne sont pas bons* (donc $\neg L$) et qu'il en va de même pour la soupe. Alors pour traduire la première proposition il faut d'abord se rappeler que *il suffit que P pour Q* a les mêmes conditions de vérité que $(P \rightarrow Q)$ ¹. Alors, puisqu'on a affaire à la négation d'une phrase de la forme *il suffit...*, on obtient $\neg(L \rightarrow S)$.

La seconde proposition se traduit naturellement $(\neg S \rightarrow \neg L)$.

Sans faire la table de vérité, on peut remarquer que cette dernière proposition est équivalente à $(L \rightarrow S)$ (contraposition). Par conséquent, on voit immédiatement que les deux propositions sont contradictoires, puisque l'une est la négation de l'autre.

On peut aussi bien sûr calculer la table de vérité des deux formules.

Exercice 4

Traduire la phrase suivante en logique des propositions, et donner ses conditions de vérité quand on est dans le cas où : (a) la porte est fermée, (b) c'est trop tard, et (c) Paul n'est pas en avance. Décrivez une situation dans laquelle cette phrase est fausse.

- (2) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

1. Alors que la phrase *il faut que P pour Q* a les conditions de vérité de $(Q \rightarrow P)$, ce qui explique que quand on énonce qu'*il faut et il suffit que P pour Q* on énonce que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q (et réciproquement), ce qui correspond à l'équivalence (matérielle) entre P et Q , puisqu'on a alors à la fois $(P \rightarrow Q)$ et $(Q \rightarrow P)$.

..... Corrigé

- (3) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

Une première décomposition, syntaxique « de surface », pourrait faire apparaître les propositions suivantes.

- Paul ou Marie arrive en avance : α
- La porte est fermée : β
- Ils frappent chez Jean : γ
- Ce n'est pas trop tard : δ

Avant de les décomposer, on peut essayer de se figurer la structure globale de la formule avec ces propositions. La phrase se ré-écrit (4-a). Si on traduit *quand* comme *si, et* par \wedge , et « a si b » par $b \rightarrow a$, cela donne (4-b) (parenthèses externes omises pour la lisibilité), ce qui est équivalent à (4-c).

- (4) a. Quand α et β , γ si δ .
- b. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$
- c. $(\alpha \wedge \beta \wedge \delta) \rightarrow \gamma$

Mais il faut maintenant décomposer les propositions au sens grammatical en propositions au sens logique. Pour α , on est dans un cas courant où la disjonction sur le sujet correspond à une disjonction de deux propositions : $\alpha = P \vee M$. La proposition β ne peut pas être plus décomposée. Appelons-la F . La proposition δ comprend une négation, soit $\delta = \neg T$.

Considérons maintenant la proposition γ . Elle comprend un pronom, qui se comporte un peu comme une variable. Autrement dit, γ n'a pas de valeur de vérité tant que n'est pas explicité le référent du pronom. Les possibilités sont les suivantes (P_j dénote *Paul frappe chez Jean*, et M_j dénote *Marie frappe chez Jean*).

- *ils = Paul et Marie*. (4) se traduit : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \wedge M_j))$
C'est trop fort par rapport à la phrase initiale.
- *ils = Paul ou Marie*. On a alors : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \vee M_j))$
Cette fois, c'est trop faible (c'est vrai si c'est Paul qui arrive en avance et Marie qui frappe chez Jean), mais on peut éventuellement considérer que le renforcement du sens (c'est celui qui arrive en avance qui frappe à la porte) est dû à un effet pragmatique.
- *ils = celui (parmi Jean et Marie) qui est arrivé en avance*. Dans ce cas, il faut modifier la structure globale de la formule :
 $((P \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow P_j)) \vee ((M \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow M_j))$

La situation décrite correspond à F et T vraies, et P fausse. Il reste donc les variables propositionnelles M , P_j , M_j , qui peuvent chacune être vraies ou fausses. On peut observer que $(P \wedge F)$ est toujours fausse, et donc l'implication dont elle est l'antécédent toujours vraie, et donc la disjonction toujours vraie. On peut aussi faire la table de vérité suivante.

$((P \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow P_j))$										$((M \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow M_j))$								
0	0	1	1	0	1	1	0	1		0	0	1	1	0	1	1	0	
										0	0						1	
							0			1	1						0	
							0			1	1						1	
							1			0	0						0	
							1			0	0						1	
							1			1	1						0	
							1			1	1						1	

Pour que la formule soit fausse, il faut que l'antécédent soit vrai et le conséquent faux, c'est-à-dire que Paul et Marie arrivent en avance, que la porte soit fermée, qu'il ne soit pas trop tard, et qu'ils ne frappent (pourtant) pas ni l'un ni l'autre chez Jean.

Exercice 5

Parmi les discours suivants, lesquels sont des raisonnements corrects ?

- (5)
- a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.
 - b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.
 - c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.
 - d. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf.
 - e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.

..... Corrigé

- (6) a. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Jean n'est pas coupable. Donc Pierre n'a pas menti.

Choisissons P pour représenter la proposition *Pierre a menti* et J pour *Jean est coupable*. La première prémisse est $(P \rightarrow J)$; la seconde est $\neg J$; leur conjonction est $((P \rightarrow J) \wedge \neg J)$. Dans une table de vérité comprenant une colonne pour la conjonction des prémisses et une colonne pour la conclusion, on peut voir que *dans toutes les situations où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi*. Le discours est donc valide.

Le type d'inférence illustré par ce discours est appelé *modus tollendo tollens*, ou plus simplement *modus tollens*.

- b. Si Pierre a menti, alors Jean est coupable. Or Pierre n'a pas menti. Donc Jean n'est pas coupable.

Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question (6-a). La première prémisse est $(P \rightarrow J)$; la seconde est $\neg P$; leur conjonction est $((P \rightarrow J) \wedge \neg P)$. Dans la table de vérité, on trouve une ligne où la conjonction des prémisses est vraie et la conclusion fausse. Le discours n'est donc pas valide.

Ce type de raisonnement fallacieux est assez répandu dans la vie quotidienne. On peut considérer qu'il s'agit d'une faute logique, mais on peut aussi considérer que l'erreur vient d'une mauvaise interprétation de *si* : il arrive fréquemment qu'en entendant *B si A* on comprenne *B si et seulement si A*, et cette "interprétation renforcée" est considérée par certains linguistes comme une *implicature* : une inférence qui n'est pas nécessairement logiquement valide, mais que l'on fait dans certains contextes, sur la base de principes généraux de communication.

- c. Si Pierre se présente, alors Jean démissionne. Si Jean démissionne, alors Albert se présente. Si Albert se présente, il sera élu. Si Albert est élu, Pierre n'est pas élu. Si Pierre ne se présente pas, il n'est pas élu. Donc Pierre n'est pas élu.

Attribuons les lettres suivantes à chaque proposition simple :

— P : *Pierre se présente*

— J : *Jean démissionne*

— A : *Albert se présente*

— E : *Albert est élu*

— R : *Pierre est élu*

Les prémisses sont :

— $(P \rightarrow J)$

— $(J \rightarrow A)$

— $(A \rightarrow E)$

— $(E \rightarrow \neg R)$

— $(\neg P \rightarrow \neg R)$

Il faut donc déterminer si on a une relation de conséquence logique entre la conjonction de ces prémisses et la conclusion $(\neg R)$. Cela peut se faire en calculant la table de vérité, ce qui est possible mais fastidieux, puisqu'elle contient $2^5 = 32$ lignes. On peut aussi exploiter une propriété facile à démontrer dans le cas général : $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$ a pour conséquence logique $A \rightarrow C$. Si on applique cette propriété aux prémisses en présence, on peut conclure que quand les prémisses sont vraies, alors la conjonction $(P \rightarrow \neg R) \wedge (\neg P \rightarrow \neg R)$ est vraie. Or on peut facilement établir avec une table de vérité à 4 lignes que si cette dernière conjonction est vraie, alors $\neg R$

est vraie. $\neg R$ est donc une conséquence logique de cette dernière conjonction, qui est elle-même une conséquence logique de la conjonction initiale : le syllogisme est valide.

- d. Si Horace aime Juliette (H), elle l'épousera (J). Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf (G). Or Juliette n'épousera pas Horace, donc elle épousera Gandalf. La conjonction des prémisses est $(H \rightarrow J) \wedge (\neg H \rightarrow G) \wedge \neg J$ et la conclusion G . L'inférence est valide. En effet, dans l'unique situation où la conjonction des prémisses est vraie, la conclusion l'est aussi (cette situation est celle où $H = 0$, $J = 0$ et $G = 1$).
- e. Si Horace aime Juliette, elle l'épousera. Si Horace n'aime pas Juliette, elle épousera Gandalf. Or Juliette épousera Gandalf, donc elle n'épousera pas Horace.

Reprenons les mêmes lettres de proposition qu'à la question précédente. La conjonction des prémisses est $(H \rightarrow J) \wedge (\neg H \rightarrow G) \wedge G$ et la conclusion $\neg J$. La table de vérité complète est la suivante :

H	J	G	$H \rightarrow J$	$\neg H \rightarrow G$	$\neg J$
0	0	0	1	0	1
0	0	■	■	■	1
0	1	0	1	0	0
0	1	■	■	■	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	■	■	■	0

Dans cette table, il y a trois situations où les trois prémisses sont vraies (en vert), et on observe que dans deux d'entre elles, la conclusion n'est pas vraie. On peut donc en conclure que le syllogisme n'est pas valide.

Exercice 6

Traduire les prémisses et la conclusion du syllogisme suivant en formules de logique des propositions. Ce syllogisme est-il valide ?

Quand le professeur est absent ou malade, les étudiants se réjouissent

Le professeur est malade

Les étudiants se réjouissent.

..... Corrigé

Quand le professeur est absent ou malade, les étudiants se réjouissent	$((A \vee M) \rightarrow J)$
Le professeur est malade	M
Les étudiants se réjouissent	J

Ce syllogisme est valide, et pour le montrer on peut calculer la table de vérité composite.

A	M	J	$(A \vee M)$	$\overbrace{((A \vee M) \rightarrow J)}^{\varphi}$	prémises $(\varphi \wedge M)$	concl. J	$((\varphi \wedge M) \rightarrow J)$
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Il est bien sûr important que la table de vérité soit complète (le bon nombre de lignes et de colonnes), et juste ; mais il est encore plus important de **lire** la table de vérité pour démontrer le résultat : dans le cas qui nous occupe, on peut dire, indifféremment :

- Dans toutes les situations où les prémisses sont vraies (en jaune dans la table), la conclusion est vraie (en bleu), par conséquent le syllogisme est valide ;
- La formule $(\alpha \rightarrow \omega)$ (où α représente les prémisses et ω la conclusion) est une tautologie (en vert dans la table). Par conséquent le syllogisme est valide.