Exercice 1

Pour les deux phrases suivantes, proposer une phrase contradictoire, et une phrase contraire (non contradictoire).

(1) a. Max est en retard et Marie est en avance
b. Max est en retard ou Marie est en avance

Corrigé

(1a) Max est en retard et Marie est en avance

Contradictoire Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons)

(2) a. Il est faux que Max est en retard et Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{\textit{ou}}$ Marie n'est pas en avance

Contraire De nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les même propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles.[1]

(3) a. Max n'est pas en retard et Marie n'est pas en avance
b. $\neq$ Max est en retard et Marie n'est pas en avance
c. $\neq$ Max est à l'heure
d. $\neq$ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

(1b) Max est en retard ou Marie est en avance

Contradictoire Une seule proposition contradictoire (exprimée de plusieurs façons)

(4) a. Il est faux que Max est en retard ou Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{\textit{et}}$ Marie n'est pas en avance
c. = Max n'est pas en retard, ni Marie en avance

Contraire De nouveau plusieurs possibilités (et certaines sont aussi contraires à (1a))

(5) a. Max est à l'heure et Marie est à l'heure
b. $\neq$ Max est en retard et il n'est pas en retard[2]
c. $\neq$ Max est en avance et Marie est en retard
d. $\neq$ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

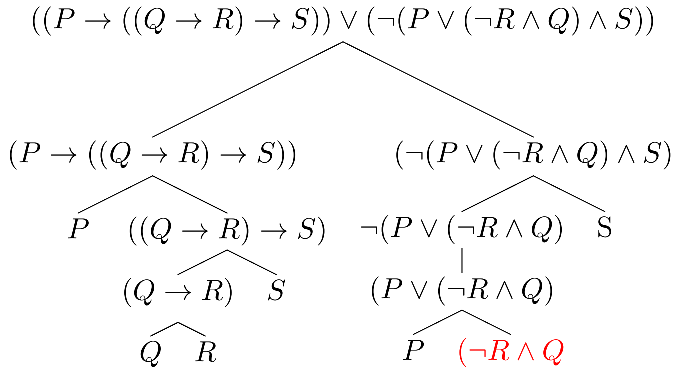
1. On admettra que *ne pas être en retard* n'est pas équivalent à *être en avance* : on peut aussi *être à l'heure*.
2. Cette proposition est toujours fausse, donc en particulier elle ne peut pas être vraie quand (1b) l'est...

Exercice 2

L'expression $((P \to ((Q \to R) \to S)) \vee (\neg(P \vee (\neg R \wedge Q) \wedge S))$ est-elle une formule bien formée de la logique des propositions ? Justifiez votre réponse avec un arbre de décomposition.

. . . . Corrigé . . . .

Cette expression n'est pas une formule bien formée. En effet, elle contient l'expression en rouge dans l'arbre ci-dessous, qui n'est pas une formule bien formée.

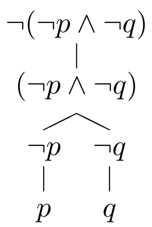


Exercice 3

Considérer la formule (6). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

(6) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

. . . . Corrigé . . . .



Beaucoup d'ordres possibles pour les 4 colonnes p, q, $\neg p$, $\neg q$, avec la seule contrainte que p soit déterminé avant $\neg p$, et q avant $\neg q$. Pour le reste, la dernière colonne calculée est la racine de l'arbre.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Exercice 4

Trouvez une formule équivalente à $(P \to Q)$ qui n'utilise pas le connecteur $\to$, et montrez leur équivalence en donnant la table de vérité des deux formules.

.... Corrigé ....

Pour chaque formule $\varphi = P \odot Q$, où $\odot$ désigne un connecteur différent de $\to$, il faut (et il suffit) de trouver une formule équivalente φ' ne comprenant que les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$.
Pour démontrer l'équivalence, il faut passer par la table de vérité composite.

On a : $P \to Q \quad \leftrightarrow \quad (\neg P \vee Q)$
$\quad\quad\; P \to Q \quad \leftrightarrow \quad \neg(P \wedge \neg Q)$

P	Q	$(P \to Q)$	$(\neg P \vee Q)$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
0	0	1	$(1 \vee 0)$ =1	$\neg(0 \wedge 1)$ =1
0	1	1	$(1 \vee 1)$ =1	$\neg(0 \wedge 0)$ =1
1	0	0	$(0 \vee 0)$ =0	$\neg(1 \wedge 1)$ =0
1	1	1	$(0 \vee 1)$ =1	$\neg(1 \wedge 0)$ =1

Exercice 5

Lesquelles parmi les formules suivantes sont des **tautologies** ?

(7) a. $(p \to (q \to p))$
b. $((p \to q) \to (q \to p))$
c. $((p \to q) \to (p \wedge q))$
d. $(((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)))$
e. $((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r))$

.... Corrigé ....

Pour montrer qu'une formule est une tautologie, il suffit de faire une table de vérité composite et vérifier qu'elle est vraie en toute circonstance.

(8) a. $(p \to (q \to p))$ => OK

(	p	$\to$	(	q	$\to$	p	)	)
	0	1		0	1	0		
	0	1		1	0	0		
	1	1		0	1	1		
	1	1		1	1	1		

b. $((p \to q) \to (q \to p))$ => NOK

(	(	p	$\to$	q	)	$\to$	(	q	$\to$	p	)	)
		0	1	0		1		0	1	0		
		0	1	1		0		1	0	0		
		1	0	0		1		0	1	1		
		1	1	1		1		1	1	1		

c. $((p \to q) \to (p \wedge q))$ => NOK

(	(	p	$\to$	q	)	$\to$	(	p	$\wedge$	q	)	)
		0	1	0		0		0	0	0		
		0	1	1		0		1	0	0		
		1	0	0		1		0	0	1		
		1	1	1		1		1	1	1		

d. $(((p \wedge q) \to r) \to (p \to (q \to r)))$ => OK

(	(	(	p	$\wedge$	q	)	$\to$	r	)	$\to$	(	p	$\to$	(	q	$\to$	r	)	)	)
			0	0	0		1	0		1		0	1		0	1	0			
			0	0	0		1	1		1		0	1		0	1	1			
			0	0	1		1	0		1		0	1		1	0	0			
			0	0	1		1	1		1		0	1		1	1	1			
			1	0	0		1	0		1		1	1		0	1	0			
			1	0	0		1	1		1		1	1		0	1	1			
			1	1	1		0	0		1		1	0		1	0	0			
			1	1	1		1	1		1		1	1		1	1	1			

e. $((p \to (q \to r)) \to ((p \wedge q) \to r))$ => OK

(	(	p	$\to$	(	q	$\to$	r	)	)	$\to$	(	(	p	$\wedge$	q	)	$\to$	r	)	)
		0	1		0	1	0			1			0	0	0		1	0		
		0	1		0	1	1			1			0	0	0		1	1		
		0	1		1	0	0			1			0	0	1		1	0		
		0	1		1	1	1			1			0	0	1		1	1		
		1	1		0	1	0			1			1	0	0		1	0		
		1	1		0	1	1			1			1	0	0		1	1		
		1	0		1	0	0			1			1	1	1		0	0		
		1	1		1	1	1			1			1	1	1		1	1		

Exercice 6

Après avoir fait apparaître les différentes propositions élémentaires (atomiques) qui la constituent, et avoir associé à ces propositions des lettres, proposer une formule qui a les même conditions de vérité que chacune des phrases suivantes :

(9) a. En cas de mauvais temps, ou si trop de participants sont malades, la soirée sera annulée
b. Si Pierre vient, je ne le recevrai pas.
c. Charles viendra avec Marie.
d. Jean vient seulement si Pierre ne vient pas.
e. Si tu as froid, il y a une couverture dans le placard.
f. Nous partirons, à moins qu'il pleuve.
g. Jean est parti sans prévenir Marie.
h. Jean s'est trompé, tout comme moi, quoi qu'il en dise.
i. Jean allait souvent boulevard Diderot, où habitait son père.

(10) a. Pour que la fête soit réussie, il faut que l'alcool coule à flots
b. Il suffit que l'alcool coule à flot pour que la fête soit réussie
c. Pour que Jean tombe, il suffit que tu le pousses

. . . . Corrigé . . . .

(9)

a. En cas de mauvais temps, ou si trop de participants sont malades, la soirée sera annulée.
P = « Il y a du mauvais temps » ; Q = « Trop de participants sont malades » ; R = « La soirée sera annulée »
$((P \vee Q) \to R)$

b. Si Pierre vient, je ne le recevrai pas.
P = « Pierre vient » ; Q = « Je le recevrai »
$(P \to \neg Q)$

c. Charles viendra avec Marie.
P = « Charles viendra avec Marie »
P

d. Jean vient seulement si Pierre ne vient pas.
J = « Jean vient » ;
P = « Pierre vient » ;
$(J \to \neg P)$
Note : la phrase *Jean vient si Pierre ne vient pas*, équivalente à *Si Pierre ne vient pas, (alors) Jean vient*, serait traduite en $(\neg P \to J)$. Le fait que Pierre ne vienne pas serait une condition suffisante pour que Jean vienne. Mais dans notre cas, c'est une condition nécessaire qui est exprimée : une manière simple de reformuler la phrase initiale pour bien en voir les conditions de vérité est de dire : *Si Jean est venu, c'est que Pierre n'est pas venu* (puisque Jean ne vient que si Pierre ne vient pas). D'où la flèche orientée de J vers $\neg P$.

e. Si tu as froid, il y a une couverture dans le placard.
Cette phrase n'est manifestement pas une conditionnelle au sens classique, et ne peut pas être interprétée comme signifiant *Il suffit que tu aies froid pour qu'il y ait une couverture dans le placard*. Les linguistes suggèrent qu'elle devrait peut-être être interprétée comme une sorte de "méta-conditionnelle" : quelque chose comme *Si tu as froid, tu seras intéressé d'apprendre qu'il y a une couverture dans le placard*. La formalisation d'une telle phrase requiert des outils formels qui ne sont pas dans la portée de ce cours.

f. Nous partirons, à moins qu'il pleuve.
P = « Nous partirons » ;
Q = « Il pleut »
$(P \leftrightarrow \neg Q)$
Equivalent à "Nous partirons si et seulement si il ne pleut pas".
Il s'agit d'une des rares façons dont on pourrait (peut-être) exprimer la double flèche en langue naturelle.

g. Jean est parti sans prévenir Marie.
P = « Jean est parti » ;
Q = « Il a prévenu Marie »
$(P \wedge \neg Q)$

h. Jean s'est trompé, tout comme moi, quoi qu'il en dise.
J = « Jean s'est trompé »
M = « Je me suis trompé »
D = « Jean dit qu'il ne s'est pas trompé »
$((J \wedge M) \wedge D)$

i. Jean allait souvent boulevard Diderot, où habitait son père. P = « Jean allait souvent boulevard Diderot » ;
Q = « Son père habitait boulevard Diderot »
$(P \wedge Q)$

(10) P = « La fête est réussie » ; Q = « L'alcool coule à flots. » ;
R = « Jean tombe » ; S = « Tu le pousses. »

a. Pour que la fête soit réussie, il faut que l'alcool coule à flots. $(P \to Q)$
b. Il suffit que l'alcool coule à flot pour que la fête soit réussie. $(Q \to P)$
c. Pour que Jean tombe, il suffit que tu le pousses. $(S \to R)$