Exercice 1

1. Proposer une phrase contraire à la phrase (1).
2. Proposer une phrase contradictoire à la phrase (1), si possible naturelle.
3. Après avoir traduit la phrase (1) en logique des propositions, justifiez vos propositions grâce à une table de vérité.

(1) Cet idiot de Jean s'est encore trompé.

....Corrigé...

1. **Contradictoire** : Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons).

   (2) a. Il est faux de dire que cet idiot de Jean s'est encore trompé.
   b. = Jean n'est pas idiot ou ne s'est pas trompé.

2. **Contraire** : Il y a de nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les mêmes propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles.

   (3) a. Jean n'est pas idiot et il ne s'est pas trompé.
   b. ≠ Jean est idiot et il ne s'est pas trompé.
   c. ≠ Jean est futé.
   d. ≠ Jean est futé et il ne s'est pas trompé.
   e. ...

3. **Table de vérité** : La phrase (1) peut être traduite ainsi : $(I \wedge T)$, avec I = Jean est idiot et T = Jean s'est encore trompé. La phrase (2-b) se traduit alors $(\neg I \vee \neg T)$. La phrase (3-a) peut se traduire $(\neg I \wedge \neg T)$. La table de vérité suivante permet de vérifier que les valeurs de vérité de (1) et de (2-b) sont opposées dans tous les cas, et que les colonnes des formules (1) et de (3-a) montrent que ces formules ne sont jamais vraies en même temps, mais peuvent être fausses en même temps.

I	T	$(I \wedge T)$ (1)	$(\neg I \vee \neg T)$ (2-b)	$(\neg I \wedge \neg T)$ (3-a)
0	0	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Exercice 2

Utiliser une table de vérité pour établir la validité (ou non) du syllogisme suivant :

$((A \wedge \neg P) \vee P)$
$\neg P$
___
A

.... Corrigé ....

A	P	$\neg P$	$(A \wedge \neg P)$	*pms1* $(((A \wedge \neg P) \vee P)$	*pms2* $\neg P$	*prémisses* $((A \wedge \neg P) \vee P) \wedge \neg P)$	*concl.* A	$((((A \wedge \neg P) \vee P) \wedge \neg P) \rightarrow A)$
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1

Lecture de la table. On examine **tous** les cas où les prémisses sont **toutes** vraies (en vert). Dans ce cas, puisque la conclusion l'est aussi (en rouge), on peut conclure que

le syllogisme est valide

et ceci est confirmé par la dernière colonne, qui montre que la formule (pms $\rightarrow$ concl) est une tautologie.

Exercice 3

L'expression $(\neg R \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg((P \wedge R) \wedge \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg R))))$ est-elle une formule bien formée de la logique des propositions ? Justifiez votre réponse avec un arbre de décomposition.

. . . . Corrigé . . . .

Cette expression est une formule bien formée, comme l'indique l'arbre ci-dessous.

- $(\neg R \rightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg((P \wedge R) \wedge \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg R))))$
  - $\neg R$
    - R
  - $((P \wedge Q) \vee (\neg((P \wedge R) \wedge \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg R)))$
    - $(P \wedge Q)$
      - P
      - Q
    - $(\neg((P \wedge R) \wedge \neg P) \rightarrow (\neg P \vee \neg R))$
      - $\neg((P \wedge R) \wedge \neg P)$
        - $((P \wedge R) \wedge \neg P)$
          - $(P \wedge R)$
            - P
            - R
          - $\neg P$
            - P
      - $(\neg P \vee \neg R)$
        - $\neg P$
          - P
        - $\neg R$
          - R

Exercice 4

Soient les phrases suivantes :

(4)
  a. On travaillerait ensemble, ce serait plus gai.
  b. Pour que Jean réussisse, il faut que Paul ne l'aide pas.
  c. Si on vote la grève, alors on participe au piquet ou on est inconséquent.
  d. C'est quand il pleut qu'un parapluie est utile.
  e. Pour que la négociation aboutisse, il faut que le responsable de l'une ou l'autre partie fasse des concessions.

1. Traduire les phrases (4) en logique des propositions.
2. Proposer une phrase contradictoire avec la phrase (4-a) (c'est-à-dire une phrase qui soit vraie quand (4-a) est fausse, et fausse quand (4-a) est vraie). Vous pouvez vous aider d'une table de vérité.
3. En vous appuyant sur une table de vérité, donnez les conditions de vérité dans laquelle la phrase (4-c) est vraie.

Corrigé

1. Traduction des phrases :

a.	On travaillerait ensemble, ce serait plus gai. $(P \to Q)$ P = On travaille ensemble ; Q = C'est plus gai.
b.	Pour que Jean réussisse, il faut que Paul ne l'aide pas. $(J \to \neg A)$ J = Jean réussit ; A = Paul aide Jean.
c.	Si on vote la grève, alors on participe au piquet ou on est inconséquent.. $(G \to (K \vee I))$ G = On vote la grève ; K = On participe au piquet ; I = On est inconséquent
d.	C'est quand il pleut qu'un parapluie est utile. $(L \to M)$ L = Il pleut ; M = Un parapluie est utile.
e.	Pour que la négociation aboutisse, il faut que le responsable de l'une ou l'autre partie fasse des concessions. $(N \to (R_1 \vee R_2))$ N = La négociation aboutit ; R_1 = Le responsable d'une partie fait des concessions ; R_2 = Le responsable de l'autre partie fait des concessions.

2. La table de vérité de la phrase (4-a) est celle de l'implication matérielle.
Pour trouver une phrase contradictoire, il faut trouver une phrase dont les valeurs de vérités sont inversées par rapport à la phrase initiale, qui ait donc les valeurs de vérité de la colonne ϕ dans cette table :

P	Q	$(P \to Q)$	ϕ
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

3. Il suffit de lire la table de vérité de (4-c) :

G	K	I	$(K \vee I)$	$(G \to (K \vee I))$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

La phrase est vraie tout le temps sauf quand on vote la grève, qu'on ne fait pas le piquet et qu'on n'est pas inconséquent.