Exercice 1

1. Proposer une phrase contraire à la phrase (1).
2. Proposer une phrase contradictoire à la phrase (1), si possible naturelle.
3. Après avoir traduit la phrase (1) en logique des propositions, justifiez vos propositions grâce à une table de vérité.

(1) Ce paresseux de Jean dort encore.

.... Corrigé ....

1. **Contradictoire** : Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons)

   (2) a. Il est faux de dire que ce paresseux de Jean dort encore.
   b. = Jean n'est pas paresseux ou ne dort plus.

2. **Contraire** : Il y a de nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les même propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles.

   (3) a. Jean n'est pas paresseux et il ne dort plus.
   b. ≠ Jean est paresseux et il ne dort plus.
   c. ≠ Jean est travailleur.
   d. ≠ Jean est travailleur et il est réveillé.
   e. ...

3. **Table de vérité** : La phrase (1) peut être traduite ainsi : $(P \wedge J)$, avec P = Jean est paresseux et J = Jean dort encore. La phrase (2-b) se traduit alors $(\neg P \vee \neg J)$. La phrase (3-a) peut se traduire $(\neg P \wedge \neg J)$. La table de vérité suivante permet de vérifier que les valeurs de vérité de (1) et de (2-b) sont opposées dans tous les cas, et que les colonnes des formules (1) et de (3-a) montrent que ces formules ne sont jamais vraies en même temps, mais peuvent être fausses en même temps.

P	J	$(P \wedge J)$ **??**	$(\neg P \vee \neg J)$ **??**	$(\neg P \wedge \neg J)$ **??**
0	0	0	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

Exercice 2

Utiliser une table de vérité pour établir la validité (ou non) du syllogisme suivant :

$((A \rightarrow P) \rightarrow P)$
$\neg P$

A

. . . . Corrigé . . . .

A	P	$A \rightarrow P$	*pms1* $(A \rightarrow P) \rightarrow P$	*pms2* $\neg P$	*prémisses* $((A \rightarrow P) \rightarrow P) \wedge \neg P$	*concl.* A	$(((A \rightarrow P) \rightarrow P) \wedge \neg P) \rightarrow A$
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Lecture de la table. On examine **tous** les cas où les prémisses sont **toutes** vraies (en vert). Dans ce cas, puisque la conclusion l'est aussi (en rouge), on peut conclure que

le syllogisme est valide

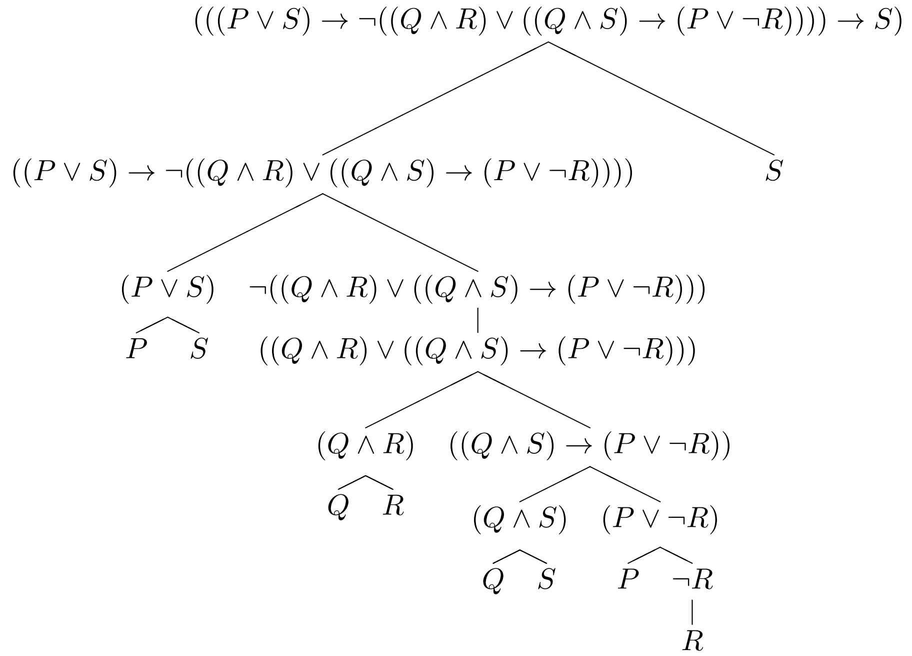
et ceci est confirmé par la dernière colonne, qui montre que la formule (pms $\rightarrow$ concl) est une tautologie.

Exercice 3

L'expression $(((P \vee S) \rightarrow \neg((Q \wedge R) \vee ((Q \wedge S) \rightarrow (P \vee \neg R)))) \rightarrow S)$ est-elle une formule bien formée de la logique des propositions ? Justifiez votre réponse avec un arbre de décomposition.

. . . . Corrigé . . . .

Cette expression est une formule bien formée, comme indiqué dans l'arbre ci-dessous



Exercice 4

Soient les phrases suivantes :

(4)
- a. Quand on travaille ensemble, c'est plus gai.
- b. Ce n'est pas vrai que ni le concierge ni le gardien n'ont la clé.
- c. On ne fait pas de logique sans se remuer les méninges.
- d. Si tes amis te font confiance, ils ne t'abandonnent pas.
- e. Le nouveau directeur doit rencontrer soit le DRH, soit le président, si le CA le demande

1. Traduire les phrases (4) en logique des propositions.
2. Proposer une phrase contradictoire avec la phrase (4-a) (c'est-à-dire une phrase qui soit vraie quand (4-a) est fausse, et fausse quand (4-a) est vraie). Vous pouvez vous aider d'une table de vérité.
3. En vous appuyant sur une table de vérité, donnez les conditions de vérité dans laquelle la phrase (4-c) est vraie.

Corrigé

1.

a.	Quand on travaille ensemble, c'est plus gai. $(P \to Q)$ P = On travaille ensemble ; Q = C'est plus gai.
b.	Ce n'est pas vrai que ni le concierge ni le gardien n'ont la clé. $\neg(\neg C \land \neg G)$ ou encore $(C \lor G)$ C = Le concierge a la clé ; G = Le gardien a la clé.
c.	On ne fait pas de logique sans se remuer les méninges. $(L \to M)$ qui est équivalent à $\neg(L \land \neg M)$ L = On fait de la logique ; M = On se remue les méninges.
d.	Si tes amis te font confiance, ils ne t'abandonnent pas. $(J \to \neg A)$ J = Tes amis te font confiance ; A = Tes amis t'abandonnent.
e.	Le nouveau directeur doit rencontrer soit le DRH, soit le président, si le CA le demande. $((D_1 \to N_1) \lor (D_2 \to N_2))$ (parmi d'autres possibilités) N_1 = Le nouveau directeur doit rencontrer le DRH ; N_2 = Le nouveau directeur doit rencontrer le président ; D_1 = Le CA demande à ce que le directeur rencontre le DRH ; D_2 = Le CA demande à ce que le directeur rencontre le président.

2. La table de vérité de la phrase (4-a) est celle de l'implication matérielle.
Pour trouver une phrase contradictoire, il faut trouver une phrase dont les valeurs de vérités sont inversées par rapport à la phrase initiale, qui ait donc les valeurs de vérité de la colonne ϕ dans cette table :

P	Q	$(P \to Q)$	ϕ
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	0

On observe que ϕ n'est vraie que quand P est fausse. On peut donc paraphraser la contradiction à (4-a) *On travaille ensemble et ce n'est pas plus gai*, soit $\phi = (P \land \neg Q)$.

3. Il suffit de lire la table de vérité de (4-c) :

L	M	$(L \to M)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

La phrase est vraie tout le temps, sauf quand on fait de la logique et qu'on ne se remue pas les méninges.