Ch2. Quantification et compositionalité
1. Ambiguïté et inversion de portée
2. Donkey sentences
  2.1 retour sur la portée
  2.2 donkey sentences
3. Négation

2.1 Portée

Déf: Si $\forall x \psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelée la $\boxed{\text{portée}}$ de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ. m̂ def pour $\exists x$

$$\underbrace{- - \overbrace{\forall x \underbrace{- - -}_{\psi}}^{\text{ss-formule}} ——}_{\varphi}$$

Def Fbf

(i) si P est un symbole de prédicat à n places
si $k_1 \cdots k_n$ sont des constantes
alors $P(k_1, \cdots k_n)$ est une fbf

(ii) si φ est une fbf
alors $\neg\varphi$ est une fbf

(iii) si φ et ψ st des fbf
alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ st des fbf

(iv) si φ est une fbf
alors $\forall x \varphi$ et $\exists x \varphi$ st des fbf

(v) Rien d'autre n'est une fbf

$\forall x\,(Px \rightarrow ((Ajx \wedge \exists y\,(Fy \wedge Qjy)) \vee Qjx))$

$\forall x$ (iv)

$Px \rightarrow ((Ajx \wedge \exists y\,(Fy \wedge Qjy)) \vee Qjx)$

(iii, $\rightarrow$)

Px (i) $\perp$ $\qquad$ $((Ajx \wedge \exists y\,(Fy \wedge Qjy)) \vee Qjx)$

(iii, $\vee$)

$(Ajx \wedge \exists y\,(Fy \wedge Qjy))$ $\qquad$ Qjx $\perp$ (i)

(iii, $\wedge$)

Ajx (i) $\perp$ $\qquad$ $\exists y\,(Fy \wedge Qjy)$

$\exists y$ (iv)

$(Fy \wedge Qjy)$

(iii, $\wedge$)

Fy $\qquad$ Qjy

~~$\exists x\; Px \wedge Gx$~~

$Px \wedge Gx$

convention : omission des parenthèses externes

$\exists x\,(Px \wedge Gx)$ $\not\equiv$ $(\exists x\; Px \wedge Gx)$

libre

$\exists x Px$ $\qquad$ Gx

~~$A \wedge B \wedge C$~~ $<$ $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$

$Px \rightarrow\ !$

$Pj \rightarrow V/F$

Def • Une occurrence d'1 var. x ds la formule φ est dite <u>libre</u> si cette occurrence ne tombe pas dans la portée d'1 quantificateur $\forall x / \exists x$ apparaissant dans φ.

• Si $\forall x \psi$ (ou $\exists x \psi$) est une sous-formule de φ et si x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite <u>liée</u> par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

$$\forall x \, \overbrace{(\exists x (Px) \wedge Gx)}$$

$$\forall x \, (\exists y \, Py \wedge Gx)$$

Def Une <u>phrase</u> est une formule sans variable libre (formule close)

fbf → interprétables (phrases)

fbf → non interprétables (formules ouvertes)

$P(j) \longrightarrow V/F$ close

$P(x) \longrightarrow ?$ ouverte

$\exists x \, P(x) \longrightarrow V/F$ close

2.2 Donkey sentences

Si Pedro possède un âne, il est riche

$$(\exists x (Ax \wedge Ppx) \to Rp)$$

$$\equiv \forall x ((Ax \wedge Ppx) \to Rp)$$

Quel que soit l'âne que Pedro possède, il est riche

Si Pedro possède un âne, il le bat.

$$\cancel{(\exists x (Ax \wedge Ppx) \to Bpx)}$$

libre !

$$\forall x ((Ax \wedge Ppx) \to Bpx) \quad ✓$$

Tout étudiant sait qu'il va réussir

Aucun étudiant n'est sûr qu'il va réussir.

$$\neg \exists x (Ex \wedge SRx)$$