3. Sémantique

3.3 Calcul

3.3.1 Tables de vérité composites.

3.3.2 Propriétés des formules

$$((p \to q) \vee (p \wedge \neg q)) = \varphi$$

p	q	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(p \to q)$	φ	ψ
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0

Tautologies

Formules contingentes

Contradictions

$$((p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)) = \psi$$

3.3.3 Relations entre formules

$(p \wedge q)$ $\qquad$ $(\neg p \vee \neg q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0

contradiction

$(p \rightarrow q)$ $\quad$ $(\neg q \rightarrow \neg p)$

		A	B	$(A \leftrightarrow B)$
p	q	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$	
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
x	x			

$1 \rightarrow 0 = 0$

Def : φ et ψ sont <u>logiquement équivalentes</u> si & seulement si

elles ont les m̂ valeurs de vérité dans toutes les circonstances

$$((p \to q) \land p) \qquad q$$

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \land p)$	q
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1
x		x		

Def : ψ est une conséquence logique de φ si & seulement si

chaque fois que φ est vraie, ψ l'est aussi.

4. Raisonnement

4.1 Théorème de déduction

$(((p \to q) \to q) \wedge \neg q) \qquad p$

					A	B	$(A \to B)$
p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \to q)$	$\neg q$	$(((p \to q) \to q) \wedge \neg q)$	p	$(((p \to q) \to q) \wedge \neg q) \to p$
0	0	1	0	1	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Théorème de déduction :

ψ est une conséquence logique de φ

ssi

la formule $(\varphi \to \psi)$ est une tautologie

Terminologie : ψ est une cq log^{q} de φ

$\equiv$

φ implique logiquement ψ

φ implique logiquement ψ

ssi

l'implication matérielle $(\varphi \to \psi)$

est toujours vraie

$(p \to q)$ // $(p \to q)$ est tjs vraie

$(x + y)$ // p implique (logiqu^t) q

Th de déduction (2)

φ et ψ sont logiquement équivalents

ssi

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ est une tautologie

4.2 Application : syllogismes valides.

S'il pleut, la route est m.
Il pleut

∴ la route est m.

prémisses

conclusion

S'il pleut, la route est m.
La route est mouillée

∴ il pleut.

VALIDE

NON VALIDE

Def : Un syllogisme est valide ssi la conclusion est une cq log^q de la conjonction des pms.

Si $\overbrace{\text{Pierre a menti}}^{P}$, alors $\overbrace{\text{Jean est coupable}}^{J}$. Or Jean n'est pas coupable. Donc $\underbrace{\text{Pierre n'a pas menti}}_{\neg P}$.

Premisses : $(P \to J)$
$\neg J$

Conclusion : $\neg P$

$((P \to J) \wedge \neg J)$
cq^{ce} log ?
$\neg P$

Modus tollens

P	J	$\neg J$	$(P \to J)$	Pms	Ccl	(Pms $\to$ Ccl)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1

x