Exercice 1

Calculer les valeurs de vérité des formules suivantes :

(1) a. $((P \leftrightarrow R) \lor R)$
 b. $((P \to Q) \to (Q \to P))$
 c. $((\neg P \land \neg Q) \to \neg(Q \lor P))$

Corrigé

P	R	$(P \leftrightarrow R)$	$((P \leftrightarrow R) \lor R)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

P	Q	$(P \to Q)$	$(Q \to P)$	$((P \to Q) \to (Q \to P))$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P \land \neg Q)$ φ	$(Q \lor P)$	$\neg(Q \lor P)$ ψ	$(\varphi \to \psi)$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1

Exercice 2

Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans chacune des situations proposées.

(2) a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
 b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
 c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
 d. Il est faux que si Marie se repose et Léa lit le journal, Jean fait la vaisselle.

Situations :
1. Jean fait la vaisselle, Marie se repose, Léa lit le journal.
2. Jean ne fait pas la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa lit le journal.
3. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.

. . . . Corrigé . . . .

Pour répondre à la question il faut d'abord proposer une représentation en logique des propositions de chaque phrase (ce qui conduit dans certains cas à expliciter les éventuelles ambiguïtés). On propose : $L =$ "Léa lit le journal", $J =$ "Jean fait la vaisselle", et $M =$ "Marie se repose".

a. Jean fait la vaisselle parce que Marie se repose et Léa lit le journal.
La conjonction *parce que* apporte une relation causale qui ne peut être formalisée en logique des propositions, il ne reste donc que les conditions de vérité : on peut dire que "A parce que B" ne peut être vraie que si A et B sont vraies. D'où la proposition $(J \wedge (M \wedge L))$ — qui est logiquement équivalente à la formule $((J \wedge M) \wedge L)$, ce qui explique qu'on s'autorise quelque fois à l'écrire tout simplement $(J \wedge M \wedge L)$.

b. Si Marie se repose, Léa ne lit pas le journal et Jean ne fait pas la vaisselle.
Il y a une ambiguïté syntaxique dans cette phrase, qui peut être analysée soit comme la conjonction d'une conditionnelle et d'une phrase simple — la formule est alors $((M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J)$, soit comme une conditionnelle dont la principale est une conjonction — formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$.

c. Soit Jean fait la vaisselle et Marie se repose, soit Jean ne fait pas la vaisselle et Léa lit le journal.
La phrase est une disjonction, on peut donc proposer la formule $((J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L))$. La question de la "traduction" de *soit... soit* est une question délicate, et on pourrait être tenté de proposer ici un "ou exclusif" plutôt que la version inclusive présentée. On s'abstiendra cependant de le faire, en s'appuyant sur la thèse dominante en sémantique/pragmatique (voir par exemple Levinson) selon laquelle la signification de la disjonction en langue naturelle est inclusive, et qu'elle fait l'objet, dans les contextes appropriés, d'un « renforcement pragmatique » qui conduit à une lecture exclusive.

d. Jean fait la vaisselle, Marie ne se repose pas, Léa ne lit pas le journal.
Cette phrase comporte une négation qui prend sans ambiguïté dans sa portée le reste de la phrase, on peut donc proposer la formule $\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$.

Pour le calcul et la réponse à la question, on pouvait soit remplir une table de vérité pour chacune des formules envisagées, en ne faisant figurer dans la table que la situation considérée (voir cidessous), soit faire le calcul de manière explicite pour chaque situation. Par exemple, la formule $(M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J))$ vaut, dans la situation n°2, $(0 \rightarrow (\neg 1 \wedge \neg 0))$, ce qui est égal à $(0 \rightarrow (0 \wedge 1))$, et donc à $(0 \rightarrow 0)$, et donc à 1. La phrase b, sous cette analyse, est donc vraie dans la situation 2.

La table suivante donne la valeur de toutes les formules envisagées dans les 3 situations, sans faire figurer les calculs intermédiaires. La paire de parenthèses externes est omise (le cas échéant).

	J	M	L	$J \wedge M \wedge L$ (a)	$(M \rightarrow \neg L) \wedge \neg J$ $(b1)$	$M \rightarrow (\neg L \wedge \neg J)$ $(b2)$	$(J \wedge M) \vee (\neg J \wedge L)$ (c)	$\neg((M \wedge L) \rightarrow J)$ (d)
sit. 1	1	1	1	1	0	0	1	0
sit. 2	0	0	1	0	1	1	1	0
sit. 3	1	0	0	0	0	1	0	0

Exercice 3

Traduire la phrase suivante en logique des propositions, et donner ses conditions de vérité quand on est dans le cas où : (a) la porte est fermée, (b) c'est trop tard, et (c) Paul n'est pas en avance. Décrivez une situation dans laquelle cette phrase est fausse.

(3) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

. . . . Corrigé . . . .

(4) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

Une première décomposition, syntaxique « de surface », pourrait faire apparaître les propositions suivantes.

— Paul ou Marie arrive en avance : α
— La porte est fermée : β
— Ils frappent chez Jean : γ
— Ce n'est pas trop tard : δ

Avant de les décomposer, on peut essayer de se figurer la structure globale de la formule avec ces propositions. La phrase se ré-écrit (5-a). Si on traduit *quand* comme *si*, *et* par $\wedge$, et « a si b » par $b \to a$, cela donne (5-b) (parenthèses externes omises pour la lisibilité), ce qui est équivalent à (5-c).

(5) a. Quand α et β, γ si δ.
b. $(\alpha \wedge \beta) \to (\delta \to \gamma)$
c. $(\alpha \wedge \beta \wedge \delta) \to \gamma$

Mais il faut maintenant décomposer les propositions au sens grammatical en propositions au sens logique. Pour α, on est dans un cas courant où la disjonction sur le sujet correspond à une disjonction de deux propositions : $\alpha = P \wedge M$. La proposition β ne peut pas être plus décomposée. Appelons-la F. La proposition δ comprend une négation, soit $\delta = \neg T$.
Considérons maintenant la proposition γ. Elle comprend un pronom, qui se comporte un peu comme une variable. Autrement dit, γ n'a pas de valeur de vérité tant que n'est pas explicité le référent du pronom. Les possibilités sont les suivantes (P_j dénote *Paul frappe chez Jean*, et M_j dénote *Marie frappe chez Jean*).

— *ils = Paul* ***et*** *Marie.* (5) se traduit : $((P \vee M) \wedge F) \to (\neg T \to (P_j \wedge M_j))$
C'est trop fort par rapport à la phrase initiale.
— *ils = Paul* ***ou*** *Marie.* On a alors : $((P \vee M) \wedge F) \to (\neg T \to (P_j \vee M_j))$
Cette fois, c'est trop faible (c'est vrai si c'est Paul qui arrive en avance et Marie qui frappe chez Jean), mais on peut éventuellement considérer que le renforcement du sens (c'est celui qui arrive en avance qui frappe à la porte) est dû à un effet pragmatique.
— *ils = celui (parmi Jean et Marie) qui est arrivé en avance.* Dans ce cas, il faut modifier la structure globale de la formule :
$((P \wedge F) \to (\neg T \to P_j)) \ \vee \ ((M \wedge F) \to (\neg T \to M_j))$

La situation décrite correspond à F et T vraies, et P fausse. Il reste donc les variables propositionnelles M, P_j, M_j, qui peuvent chacune être vraies ou fausse. On peut observer que $(P \wedge F)$ est toujours fausse, et donc l'implication dont elle est l'antécédent toujours vraie, et donc la disjonction toujours vraie. On peut aussi faire la table de vérité suivante.

$((P$	$\wedge$	$F)$	$\to$	$(\neg$	T	$\to$	$P_j))$	$\vee$	$((M$	$\wedge$	$F)$	$\to$	$(\neg$	T	$\to$	$M_j))$
0	0	1	1	0	1	1	0	**1**	0	0	1	1	0	1	1	0
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	0	0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	1	1	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0	$\vert$	1	1	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1	$\vert$	0	0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1	$\vert$	0	0	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1	$\vert$	1	1	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	0
$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1	$\vert$	1	1	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	$\vert$	1

Pour que la formule soit fausse, il faut que l'antécédent soit vrai et le conséquent faux, c'est-à-dire que Paul et Marie arrivent en avance, que la porte soit fermée, qu'il ne soit pas trop tard, et qu'ils ne frappent (pourtant) pas ni l'un ni l'autre chez Jean.

Exercice 4

Donnez, en utilisant une table de vérité composite, les conditions de vérité de la phrase suivante.

(6) Il est faux que ni les socialistes ni les communistes votent pour le projet quand il est présenté par un député de droite ou de l'extrême droite.

.... Corrigé ....

Pour répondre à la question, il faut d'abord proposer une représentation en logique des propositions de la phrase.
On propose : S = "Les socialistes votent pour le projet", C = "Les communistes votent pour le projet", D = "Le projet est présenté par un député de droite", et E = "Le projet est présenté par un député d'extrême-droite".
Cette phrase comporte une négation qui prend dans sa portée le reste de la phrase :
$\neg((D \vee E) \rightarrow (\neg S \wedge \neg C))$

Puis on nous demande les conditions de vérité de la phrase, il y a 4 propositions atomiques, soit 16 lignes possibles au tableau composite :

$\neg$	$((D$	$\vee$	$E)$	$\rightarrow$	$(\neg$	S	$\wedge$	$\neg$	$C))$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1