Exercice 1

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules bien formées de L_p ?

(1)	$\neg(\neg P \vee Q)$	(5)	$(P \to ((P \to Q)))$	(9)	$(P \vee (Q \vee R))$
(2)	$P \vee (Q)$	(6)	$((P \to P) \to (Q \to Q))$	(10)	$-P \vee Q \vee R$
(3)	$\neg(Q)$	(7)	$((P_{28} \to P_3) \to P_4)$	(11)	$(\neg P \vee \neg\neg P)$
(4)	$(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$	(8)	$(P \to (P \to Q) \to Q)$	(12)	$(P \vee P)$

Answer

(1)	$\neg(\neg P \vee Q)$	OUI	(5)	$(P \to ((P \to Q)))$	NON	(9)	$(P \vee (Q \vee R))$	OUI
(2)	$P \vee (Q)$	NON	(6)	$((P \to P) \to (Q \to Q))$	OUI	(10)	$-P \vee Q \vee R$	NON
(3)	$\neg(Q)$	NON	(7)	$((P_{28} \to P_3) \to P_4)$	OUI	(11)	$(\neg P \vee \neg\neg P)$	OUI
(4)	$(P_2 \to (P_2 \to (P_2 \to P_2)))$	OUI	(8)	$(P \to (P \to Q) \to Q)$	NON	(12)	$(P \vee P)$	OUI

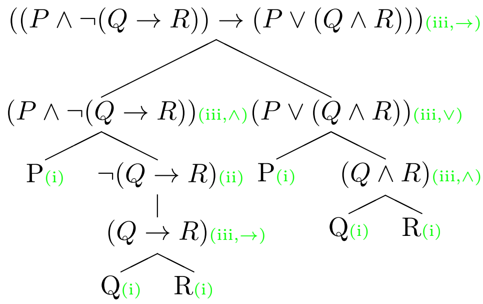
N.B. : Il arrive que l'on s'abstienne de noter la paire de parenthèses la plus externe mais en toute rigueur, on doit trouver exactement autant de paires de parenthèses qu'il y a de connecteurs binaires.

De même, pour les connecteurs associatifs (comme $\wedge$ et $\vee$), il arrive qu'on néglige d'autres parenthèses lorsque la position des parenthèses absentes n'a pas d'incidence sur la valeur de la formule. Par exemple on écrira $(a \wedge b \wedge c \wedge d)$, car les deux paires parenthèses manquantes peuvent être placées de n'importe quelle manière syntaxiquement correcte sans conséquence.

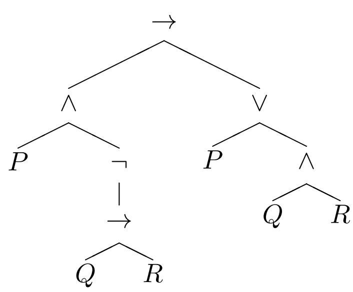
Exercice 2

Montrez que la formule suivante est une formule bien formée du calcul propositionnel en donnant son arbre de décomposition : $((P \wedge \neg(Q \to R)) \to (P \vee (Q \wedge R)))$.

Answer



version plus légère :

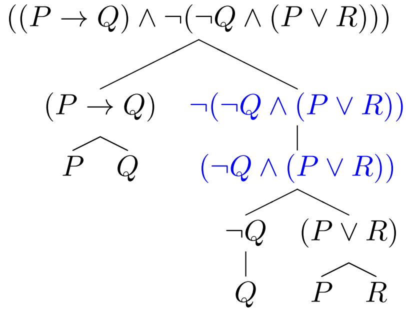


Exercice 3

Montrez que $((P \to Q) \wedge \neg(\neg Q \wedge (P \vee R)))$ est une formule bien formée de la logique des propositions.

. . . . Answer . . . .

Il suffit pour montrer qu'elle est bien formée de construire l'arbre de construction de la formule.



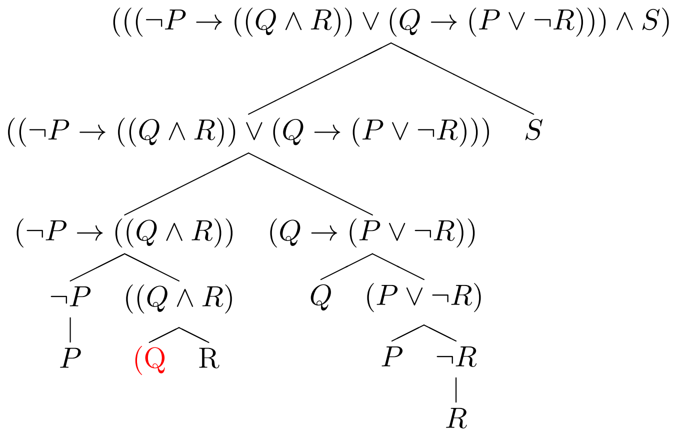
L'étape entre les deux nœuds en bleu est fréquemment oubliée. C'est une étape tout aussi nécessaire que les autres, elle correspond, comme les autres, à une colonne dans la table composite, et donc à une étape de calcul.

Exercice 4

L'expression $(((\neg P \to ((Q \wedge R)) \vee (Q \to (P \vee \neg R))) \wedge S)$ est-elle une formule bien formée de la logique des propositions ? Justifiez votre réponse avec un arbre de décomposition.

. . . . Answer . . . .

Cette expression n'est pas une formule bien formée. En effet, elle contient l'expression en rouge dans l'arbre ci-dessous, qui n'est pas une formule bien formée.

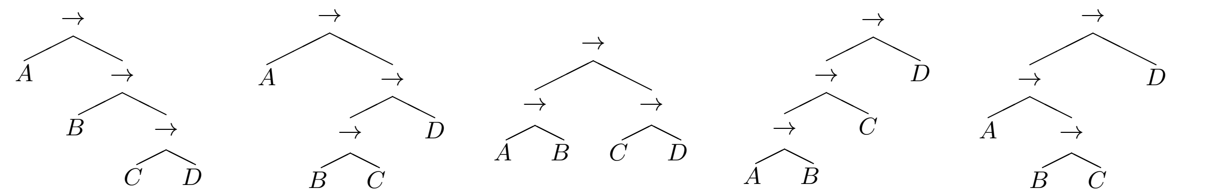


Exercice 5

Soit l'expression $A \to B \to C \to D$. Quelles sont les formules bien formées que l'on peut obtenir en plaçant des couples de parenthèses ? Donnez l'arbre de décomposition de deux des formules obtenues.

.... Answer ....

Si on prend comme signe principal la première flèche, on a deux possibilités. Si on prend la seconde flèche, il n'y a qu'une possibilité, si on prend la troisième, on a deux possibilités (symétriques). Cela donne, avec une notation simplifiée des arbres syntaxiques :



$(A \to (B \to (C \to D)))$ $(A \to ((B \to C) \to D))$ $((A \to B) \to (C \to D))$ $(((A \to B) \to C) \to D)$ $((A \to (B \to C)) \to D)$

Exercice 6

Traduire, le plus simplement possible, en langue naturelle les formules suivantes, sachant que
p = Jean est heureux
q = Jean chantonne
r = Jean énerve sa voisine

(1) a. $q \to p$
b. $q \to r$
c. $\neg p \to q \to r$

.... Answer ....

a. Quand il chantonne, Jean est heureux.
b. Quand Jean chantonne, il énerve sa voisine.
c. La formule $\neg p \to q \to r$ est ambiguë. Il faut donc commencer par la désambiguïser. Il y a cinq possibilités :

1. $(\neg p \to (q \to r))$: Quand Jean n'est pas heureux, s'il chantonne, il énerve sa voisine.
2. $((\neg p \to q) \to r)$: Si Jean chantonne quand il n'est pas heureux, il énerve sa voisine.
3. $(\neg(p \to q) \to r)$: S'il n'est pas vrai que Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
4. $\neg((p \to q) \to r))$: Il n'est pas vrai que si Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
5. $\neg(p \to (q \to r))$: Il n'est pas vrai que si Jean est heureux, il énerve sa voisine lorsqu'il chantonne.

Exercice 7

Considérer la formule (2). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

(2) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

Answer

$$\begin{array}{c} \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ | \\ (\neg p \wedge \neg q) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{cc} \neg p & \neg q \\ | & | \\ p & q \end{array} \end{array}$$

Beaucoup d'ordres possibles pour les 4 colonnes p, q, $\neg p$, $\neg q$, avec la seule contrainte que p soit déterminé avant $\neg p$, et q avant $\neg q$. Pour les reste, la dernière colonne calculée est la racine de l'arbre.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1