Exercice 1

Représenter en logique des prédicats les phrases suivantes. On précisera l'interprétation de chaque prédicat utilisé.

(1) a. Tout le monde est marqué par un amour déçu
b. Tout le monde est réveillé s'il y a un bruit dans la cour
c. Personne n'a répondu à toutes les questions
d. Jean lit tous les livres que personne ne lit

. . . . Corrigé . . . .

(2) a. Tout le monde est marqué par un amour déçu.
Ambigu : $\forall x \forall y((P(x) \wedge A(y)) \to M(x,y))$
$\forall x \exists y((P(x) \wedge A(y)) \to M(x,y))$ ou $\forall x(P(x) \to \exists y(A(y) \wedge M(x,y)))$
b. Tout le monde est réveillé s'il y a un bruit dans la cour.
Deux façons équivalentes de l'écrire :
$(\exists x B(x) \to \forall y(P(y) \to R(y)))$ ou $\forall x(P(x) \to (\exists y(B(y) \to R(x))))$
c. Personne n'a répondu à toutes les questions.
$\forall x(P(x) \to \neg \forall y(Q(y) \to R(x,y)))$
d. Jean lit tous les livres que personne ne lit.
$\forall x((L(x) \wedge \forall y(P(y) \to \neg L(y,x))) \to L(j,x))$
Noter qu'en toute rigueur, cette phrase est une contradiction ; il faudrait dire
Jean lit tous les livres que personne d'autre ne lit
$\forall x((L(x) \wedge \forall y((P(y) \wedge y \neq j) \to \neg L(y,x))) \to L(j,x))$

Exercice 2

Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

(3) a. S'il y a un bruit, Alice pleure.
b. S'il y a un bruit, tout le monde pleure.
c. S'il y a un bruit, Alice le cherche.

. . . . Corrigé . . . .

(4) a. S'il y a un bruit, Alice pleure. $\forall x(Bx \to Pa)$ ou $(\exists x Bx \to Pa)$
b. S'il y a un bruit, tout le monde pleure.
$(\exists x Bx \to \forall y(Hy \to Py))$ **ou** $\forall x(Bx \to \forall y(Hy \to Py))$ **ou** $\forall x \forall y((Bx \wedge Hy) \to Py)$
c. S'il y a un bruit, Alice le cherche. $\forall x(Bx \to Cax)$ **mais pas** $(\exists x Bx \to Ca\underline{x})$

Exercice 3

Traduisez en logique des prédicats les phrases suivantes. Conclusion ?

(5) a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper.
 b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper.
 c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes.

Corrigé

(6) a. Si un étudiant a une mauvaise note, il doit la rattraper.
 b. Tout étudiant qui a une mauvaise note doit la rattraper.
 c. Tout étudiant doit rattraper toutes ses mauvaises notes.

Bien que certains de ces énoncés comprennent des indéfinis, qu'on s'attendrait à voir traduits en logique par des existentiels, on observe qu'en fait la traduction en logique de ces trois énoncés va en fait nécessairement faire intervenir des quantificateurs universels) :

$$\forall x \forall y\ ((Sx \wedge My) \rightarrow Rxy)$$

Alternativement, d'une façon plus calquée sur la structure syntaxique de la phrase (mais quand-même avec des universels), on peut proposer :

$$\forall x\ (Sx \rightarrow \forall y\ (My \rightarrow Rxy))$$

Exercice 4

Traduire en logique des prédicats les phrases suivantes, en donnant plusieurs formules en cas d'ambiguïté. On représentera la dénotation des noms propres et des descriptions définies par des constantes.

(7) a. Tous les journaux qui n'ont pas de lecteurs vont disparaître s'ils ne trouvent pas un repreneur.
 b. Soit tout le monde prend une boisson, soit personne n'en prend.
 c. Quand tous les députés contestent une motion, elle est rejetée.
 d. Paul déteste les gens qui n'aiment personne sauf lui.
 e. Jean et Max ne connaissent pas tous les invités.

. . . . Corrigé . . . .

L'énoncé laissait ouverte la possibilité que les phrases soient ambiguës, car avec un peu de cet esprit retors qui caractérise la personne férue de sémantique, il est bien rare qu'on ne puisse pas trouver une ambiguïté ; mais dans cette série de phrases, il y a peu d'ambiguïtés vraiment plausibles...

(8) a. Tous les journaux qui n'ont pas de lecteurs vont disparaître s'ils ne trouvent pas un repreneur.

Tous les A B si C	$\forall x\ (Ax \to (Cx \to Bx))$
$\equiv$	$\forall x\ ((Ax \land Cx) \to Bx)$
x est un journal qui n'a pas de lecteurs	$Jx \land \neg\exists y\ (Py \land Lyx)$
x ne trouve pas un repreneur	$\neg\exists z\ (Rz \land Txz)$
((8-a)) $\forall x\ \big((Jx \land \neg\exists y\ (Py \land Lyx)) \to (\neg\exists z\ (Rz \land Txz) \to Dx)\big)$	

Si c'est le même repreneur (interprétation peu accessible) :

$$\exists z\ (Rz \land \forall x\ \big((Jx \land \neg\exists y\ (Py \land Lyx)) \to (\neg Txz) \to Dx)\big)$$

b. Soit tout le monde prend une boisson, soit personne n'en prend.

Soit P, soit Q	$(P \lor Q)$
tout le monde prend une boisson	$\forall x\ (Px \to \exists y\ (By \land Txy))$
personne n'en prend [de boisson]	$\forall x\ (Px \to \neg\exists y\ (By \land Txy))$
(8-b) $\big(\forall x\ (Px \to \exists y\ (By \land Txy)) \lor \forall x\ (Px \to \neg\exists y\ (By \land Txy))\big)$	

On peut imaginer que c'est la même boisson (encore moins accessible) :

$$\exists y\ (By \land (\forall x\ (Px \to Txy) \lor \forall x\ (Px \to \neg Txy)))$$

c. Quand tous les députés contestent une motion, elle est rejetée.

Donkey sentence : la version strictement compositionnelle donne une formule ouverte, la seconde formule proposée ci-après est la seule possible.

Quand P, (alors) Q	$(P \to Q)$
tous les députés contestent une motion	$\exists y\ (My \land \forall x\ (Dx \to Cxy))$
elle est rejetée	Rx
	$\cancel{(\exists y\ (My \land \forall x\ (Dx \to Cxy)) \to Ry)}$
((8-c))	$\forall y\ \big((My \land \forall x\ (Dx \to Cxy)) \to Ry\big)$

Plusieurs étudiants ont proposé la formule suivante, ou une variante, qui ne correspond pas à la phrase (8-c), mais à la phrase *Quand un député conteste une motion, elle est rejetée.* Ce n'est pas une donkey sentence, et on peut la représenter par les deux formules suivantes.

$$\forall y\ (My \to (\exists x\ (Dx \land Cxy) \to Ry))$$
$$\forall y \forall x\ (My \to ((Dx \land Cxy) \to Ry))$$

d. Paul déteste les gens qui n'aiment personne sauf lui.

x n'aime personne sauf Paul	$Axp \land \forall y((Py \land y \neq p) \to \neg Axy)$
((8-d)) $\forall x(Px \to ((Axp \land \forall y((Py \land y \neq p) \to \neg Axy)) \to Dpx))$	

e. Jean et Max ne connaissent pas tous les invités.

interprétation 1 : $\neg\forall x(Ix \to (Cjx \land Cmx))$

interprétation 2 : $\forall x(Ix \to (\neg Cjx \land \neg Cmx))$