

## Exercice 1

Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

- (1) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.  
 b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.  
 c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.

..... Corrigé.....

• Phrase (a) :

Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

Quand quelqu'un  $\overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde}}^{\Phi}$ , il a tort  
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi}$

— Premier niveau : *Quand quelqu'un  $\Phi$ , il a tort*

— l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x ((Px \wedge \Phi x) \rightarrow Tx)$$

— Deuxième niveau :  $\Phi x = x$  fait confiance à quelqu'un qui  $\Psi$

— ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y ((Py \wedge \Psi y) \wedge C(x, y))$$

$$\forall y ((Py \wedge \Psi y) \rightarrow C(x, y))$$

— Troisième niveau :  $\Psi y = y$  a trompé tout le monde

$$\forall z (Pz \rightarrow Tr(y, z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x \left( \left( Px \wedge \exists y \left( (Py \wedge \forall z (Pz \rightarrow Tr(y, z))) \wedge C(x, y) \right) \right) \rightarrow Tx \right)$$

- Phrase (b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)
 
$$\neg \exists x (GCx \wedge \neg \exists y (Py \wedge CT(x, y)))$$

$$\neg \exists x (GCx \wedge \forall y (Py \rightarrow \neg CT(x, y)))$$
- Phrase (c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)
 
$$\forall x (Px \rightarrow (Ox \vee Fx))$$

## Exercice 2

Représenter en logique des prédicats les phrases suivantes. On précisera l'interprétation de chaque prédicat utilisé.

Exemple : « Si Marie est belle, tout le monde l'aime » :  $(B(m) \rightarrow \forall x A(x, m))$   
 $B(x) = x$  est beau ;  $A(x, y) = x$  aime  $y$ .

- (2) a. Jean est fâché parce que Marie n'est pas venue.  
 b. Tout le monde est furieux dès que quelqu'un fait du bruit.  
 c. Qui veut noyer son chien l'accuse de la rage.<sup>1</sup>

..... Corrigé .....

- (3) a. Jean est fâché parce que Marie n'est pas venue.  
 b. Tout le monde est furieux dès que quelqu'un fait du bruit.  
 c. Qui veut noyer son chien l'accuse de la rage.

## Légende

	$F_1(x)$	= $x$ est fâché
	$V(x)$	= $x$ est venu
(3-a)	$F_1(j) \wedge V(m)$	$F_2(x)$ = $x$ est furieux
(3-b)	$\exists x B(x) \rightarrow \forall y F_2(y)$	$B(x)$ = $x$ fait du bruit
(3-c)	$\forall x \forall y (C(y) \wedge P(x, y) \wedge N(x, y)) \rightarrow A(x, y)$	$C(x)$ = $x$ est un chien
		$P(x, y)$ = $x$ possède $y$
		$N(x, y)$ = $x$ veut noyer $y$
		$A(x, y)$ = $x$ accuse $y$ de la rage

## Exercice 3

Proposer, pour chacune des phrases suivantes, une « traduction » en logique des prédicats, en explicitant les éventuels cas d'ambiguïté.

- (4) a. Paul ira au cinéma à condition qu'il ne soit pas malade.  
 b. Jean n'a pas perdu un seul cheveu.  
 c. Tout le monde reconnaît un acteur.  
 d. Jean cherche à rencontrer un acteur.  
 e. Chaque étudiant, s'il fait un stage, doit le faire valider par tous les professeurs.  
 f. Tout le monde cherche quelque chose que tout le monde ne trouve pas.

1. Par exemple,  $C(x) = x$  est un chien,  $P(x, y) = x$  possède  $y$ ,  $A(x, y) = x$  accuse  $y$  de la rage,  $N(x, y) = x$  veut noyer  $y$ .

## ..... Corrigé .....

- (5) a. Paul ira au cinéma à condition qu'il ne soit pas malade.  
 $C(p) \leftrightarrow \neg M(p)$
- b. Jean n'a pas perdu un seul cheveu.  
 $\neg \exists x (C(x) \wedge P(j, x))$
- c. Tout le monde reconnaît un acteur.  
 $\forall x \exists y (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x, y)$   
 $\exists y \forall x (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x, y)$   
 $\forall x \forall y (P(x) \wedge A(y)) \rightarrow R(x, y)$
- d. Jean cherche à rencontrer un acteur.  
 $\exists y (A(y) \wedge CR(j, y))$   
 $\forall y (A(y) \rightarrow CR(j, y))$
- e. Chaque étudiant, s'il fait un stage, doit le faire valider par tous les professeurs.  
 $\forall x (E(x) \rightarrow (\exists y (S(y) \wedge F(x, y)) \rightarrow \forall z (P(z) \rightarrow V(z, y))))$
- f. Tout le monde cherche quelque chose que tout le monde ne trouve pas.  
 $\exists x (C(x) \wedge \neg \forall y (P(y) \rightarrow T(y, x)) \wedge \forall z (P(z) \rightarrow C(z, x)))$   
 $\forall z \exists x ((P(z) \wedge C(x) \wedge \neg \forall y (P(y) \rightarrow T(y, x))) \rightarrow C(z, x))$

## Exercice 4

Pour chacune des formules du calcul des prédicats ci-dessous, indiquez la portée des quantificateurs et les variables libres et précisez s'il s'agit d'une phrase (exercice tiré de Gamut 1991a:77).

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\exists x (Axy \wedge Bx)$  | 1. $\exists x (Axy \vee By)$   |
| 2. $\exists x Axy \wedge Bx$  | 2. $\exists x Axx \vee \exists y By$                                 |
| 3. $\exists x \exists y Axy \rightarrow Bx$                                 | 3. $\exists x (\exists y Axy \vee By)$                               |
| 4. $\exists x (\exists y Axy \rightarrow Bx)$                               | 4. $\forall x \forall y ((Axy \wedge By) \rightarrow \exists w Cxw)$ |
| 5. $\neg \exists x \exists y Axy \rightarrow Bx$                            | 5. $\forall x (\forall y Ayx \rightarrow By)$                        |
| 6. $\forall x \neg \exists y Axy$   | 6. $\forall x \forall y Ayy \rightarrow Bx$                          |
| 7. $\neg Bx \rightarrow (\neg \forall y (\neg Axy \vee Bx) \rightarrow Cy)$ |  |

## ..... Corrigé .....

	<i>Quantific.</i>	<i>Portée</i>	<i>Variables libres</i>	<i>Phrase</i>
1.	$\exists x$	$Axy \wedge Bx$	$y$	<i>non</i>
2.	$\exists x$	$Axy$	$y$ $x$ dans $Bx$	<i>non</i>
3.	$\exists x$ $\exists y$	$\exists y Axy$ $Axy$	$x$ dans $Bx$	<i>non</i>
4.	$\exists x$ $\exists y$	$\exists y Axy \rightarrow Bx$ $Axy$	<i>aucune</i>	<i>oui</i>
5.	$\exists x$ $\exists y$	$\exists y Axy$ $Axy$	$x$ dans $Bx$	<i>non</i>
6.	$\forall x$ $\exists y$	$\neg \exists y Axy$ $Axy$	<i>aucune</i>	<i>oui</i>
7.	$\forall y$	$\neg Axy \vee Bx$	$x$ $y$ dans $Cy$	<i>non</i>
8.	$\exists x$	$Axy \vee By$	$y$	<i>non</i>
9.	$\exists x$ $\exists y$	$Axx$ $By$	<i>aucune</i>	<i>oui</i>
10.	$\exists x$ $\exists y$	$\exists y Axy \vee By$ $Axy$	$y$ dans $By$	<i>non</i>
11.	$\forall x$ $\forall y$ $\exists w$	$\forall y ((Axy \wedge By) \rightarrow \exists w Cxw)$ $(Axy \wedge By) \rightarrow \exists w Cxw$ $Cxw$	<i>aucune</i>	<i>oui</i>
12.	$\forall x$ $\forall y$	$\forall y Ayx \rightarrow By$ $Axy$	$y$ dans $By$	<i>non</i>
13.	$\forall x$ $\forall y$	$\forall y Ayy$ $Ayy$	$x$ dans $Bx$	<i>non</i>