2.3.2 Modèle (extensionnel) du premier ordre

Les propositions ne sont plus, comme en logique des propositions, les atomes de nos formules. Elles parlent d'**individus** et de **propriétés**. Un **modèle mathématique** d'une situation devra minimalement distinguer ces deux notions. La version la plus simple que l'on peut imaginer est le **modèle extensionnel du premier ordre** : il s'agit d'un **ensemble d'individus** (d'entités), à l'intérieur duquel chaque propriété est représentée par un sous-ensemble. La figure A.3 schématise cette notion de modèle. Alors, la "possession" d'une propriété se ramène à l'appartenance au sous-ensemble associé : dire $H(s)$ revient à dire que l'individu **dénoté** par s *appartient* à l'ensemble **dénoté** par H. On généralise facilement aux relations n-aires.

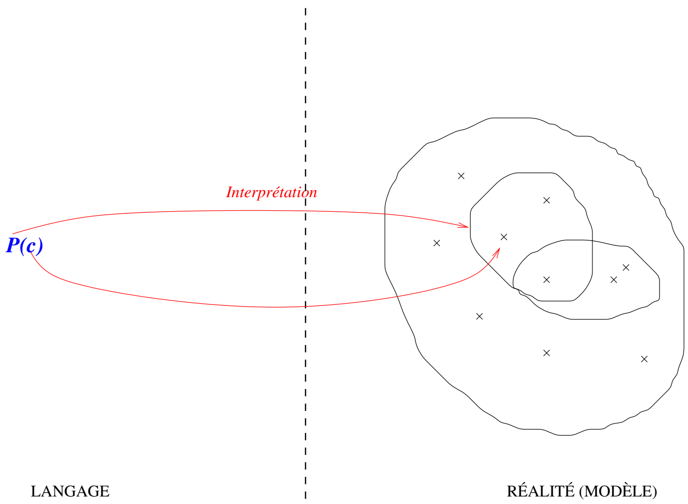

FIGURE 2.3 – Illustration schématique de la notion de modèle

Dans la suite, on considère qu'un modèle $\mathcal{M}$ est défini par un ensemble d'individus $\mathcal{U}$ (l'univers) et une fonction d'interprétation I dont le domaine de définition est l'ensemble des constantes non logiques du langage.

Plus précisément, on suppose que le vocabulaire non logique $\mathcal{V}$ est constitué d'un ensemble de constantes individuelle et d'un ensemble de prédicats d'arité quelconque : $\mathcal{V} = \mathcal{C} \cup \bigcup_i \mathcal{P}_i$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des constantes individuelles, et $\mathcal{P}_i$ est l'ensemble des prédicats d'arité i. La fonction I associe chaque constante individuelle à un élément de $\mathcal{U}$, chaque prédicat unaire à un sous-ensemble de $\mathcal{U}$, chaque prédicat binaire à un sous-ensemble de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, etc :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \mathcal{P}_1 & \longrightarrow & 2^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & 2^{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \\ & \vdots & \\ \mathcal{P}_i & \longrightarrow & 2^{\mathcal{U}^i} \end{array}$$

2.3.3 Calcul récursif de la valeur de vérité d'une formule

On veut définir une fonction $\mathcal{V}$, dite "valuation", qui, étant donné un modèle, associe à chaque formule bien formée (sans variable libre) une valeur de vérité.

La fonction $\mathcal{V}$, qui interprète une formule en la décomposant syntaxiquement, est définie de manière parallèle à la définition syntaxique :

(i)	Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1...t_n$ une constante ~~ou une variable~~ du vocabulaire de L, alors : $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(A(t_1,\dots t_n)) = 1$ ssi $\langle I(t_1), \dots I(t_n)\rangle \in I(A)$	
(ii)	Si φ est une formule dans L, alors : $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$	
(iii)	Si φ et ψ sont des formules dans L, alors : $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$
	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \rightarrow \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$	$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi)$
(iv)	Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.	

À ce stade il reste à définir la méthode de calcul pour les formules comprenant un quantificateur, et il existe deux possibilités, l'une appelée méthode par substitution, l'autre méthode tarskienne (par assignation).

L'intuition est la suivante : si la formule $\forall x E(x)$ est vraie, alors tous les individus de l'univers « vérifient » la propriété E. Mais comment traduire formellement l'idée qu'un individu donné « vérifie » E ? Une première façon de procéder consiste à supposer que tous les individus de l'univers ont un "nom" (sont associés à une constante). Dans ce cas, dire que l'individu dénoté par c vérifie (on dit aussi : *satisfait*) la formule revient à dire que si on remplace x par c, on obtient une formule vraie. La seconde façon de procéder n'utilise pas de substitution : elle consiste à considérer la variable x comme étant capable de dénoter un individu ou un autre (c'est ce que font les variables en général). Avec cette méthode, on vérifie toujours la même formule — $E(x)$, mais ce qui change c'est la mise en correspondance de la variable x avec un individu ou un autre (ce qu'on appelle une affectation (en. *assignment*).

Détaillons un peu plus ces deux méthodes, en se souvenant que ce dont nous avons besoin c'est d'une méthode générale : en général,ce qui suit le quantificateur est une formule quelconque, qui peut contenir un nombre arbitraire de sous formules, y compris des formules quantifiées.

2.3.3.1 Méthode par substitution

Pour mettre en œuvre la méthode par substitution, on fait une hypothèse supplémentaire : on suppose que la fonction d'interprétation I est surjective sur $\mathcal{C}$, ce qui revient à imposer que tous les individus de l'univers sont dénotés par (au moins) une constante du langage.

Pour mettre en œuvre la méthode, on suppose de plus qu'on est capable dans une formule quelconque, de remplacer exactement toutes les occurrences libres d'une variable donnée par une constance. Si φ est la formule initiale, on notera $\varphi_{[c/x]}$ (ou $\varphi_{[x/c]}$) la formule obtenue en remplaçant les occurrences libres de x de φ par la constante c.

Alors le tableau précédent peut être enrichi avec la paire de règles d'interprétation :

<table>
<tr><td>(i)</td><td colspan="2">Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1...t_n$ une constante ~~ou une variable~~ du vocabulaire de L, alors :
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(A(t_1, \dots t_n)) = 1$
ssi
$\langle I(t_1), \dots I(t_n)\rangle \in I(A)$</td></tr>
<tr><td>(ii)</td><td colspan="2">Si φ est une formule dans L, alors :
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\neg\varphi) = 1$
ssi
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$</td></tr>
<tr><td>(iii)</td><td colspan="2">Si φ et ψ sont des formules dans L, alors :</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \wedge \psi)) = 1$
ssi
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 1$</td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \vee \psi)) = 0$
ssi
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \to \psi)) = 0$
ssi
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi) = 0$</td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$
ssi
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\psi)$</td></tr>
<tr><td>(iv)</td><td colspan="2">Si φ est une formule et x une variable, alors :</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\forall x\varphi) = 1$
ssi
pour toute constante c de L
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi_{[c/x]}) = 1$</td><td>$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1$
ssi
il existe une constante c de L
$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}(\varphi_{[c/x]}) = 1$</td></tr>
</table>

Discussion Le problème fondamental de cette méthode est la nécessité que chaque individu de l'univers ait au moins un nom, ce qui veut dire soit qu'on ne travaille qu'avec des univers finis, si le vocabulaire du langage est fini [3] ; soit qu'on dispose d'un stock infini de constantes. Il faut ajouter que cette méthode suppose aussi que la vérification d'une formule se fasse en réalisant des substitutions, en générant un grand nombre de formules, ce qui semble plutôt inélégant et pas forcément efficace.

Cela explique qu'on propose une autre méthode, plus générale et plus élégante, où au lieu d'utiliser des constantes, on fait varier les affectations.

3. En général, on suppose qu'on a un ensemble infini dénombrable de variables dans le langeg, mais on ne fait pas forcément la même hypothèse sur les constantes.

2.3.3.2 Définition récursive de la vérité (interprétation tarskienne)

Pour cette méthode, on commence par se donner la possibilité d'interpréter une formule contenant une variable (libre).

Par exemple, pour connaître la valuation de $P(x)$, il faut que x désigne un individu dans le modèle. Pour formaliser cet aspect, on utilise des fonctions, qu'on appelle *assignment* (affectation) qui associent à chaque variable du langage un individu du domaine. L'interprétation d'une formule comme $P(x)$ pourra se faire dès lors qu'on disposera d'une telle fonction, soit g : $V_{\mathcal{M}}(P(x)) = 1$ ssi $g(x) \in I(P)$. En toute rigueur, la valuation dépend alors non seulement de $\mathcal{M}$ (et de I) mais aussi de g :

$$V_{\mathcal{M},g}(P(x)) = 1 \text{ ssi } g(x) \in I(P)$$

Pour formuler facilement les règles, on introduit la notion de *dénotation* d'un *terme* (constante ou variable) : $[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = I(t)$ si t est une constante
$[\![\mathrm{t}]\!]_{\mathcal{M},g} = g(t)$ si t est une variable

On peut alors ré-écrire la première règle de calcul donnée plus haut :

$$V_{\mathcal{M},g}(\mathrm{P}(\mathrm{t}_1,\ldots\ t_n)) = 1 \text{ ssi } \langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, \ldots [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(P).$$

Considérons maintenant les formules formées avec un **quantificateur**. Une définition assez intuitive pourrait être : $V(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un individu dans le domaine qui vérifie φ. Mais que signifie ici "vérifier" la formule φ ? On va utiliser pour le préciser la notion d'affectation.

Par exemple, la formule $\exists x E(x)$ est vraie s'il existe un individu dans le domaine D, appelons-le d, tel que, si g est telle que $g : x \mapsto d$, alors $V_{\mathcal{M},g}(E(x)) = 1$. En généralisant à partir de cet exemple, on pourrait écrire :

$$V_{\mathcal{M}}(\exists x\varphi) = 1 \text{ ssi il existe } d \in D \text{ et } g : x \mapsto d \text{ tels que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1.$$

Mais cette définition n'est pas assez générale : supposons que φ contienne à son tour un autre quantificateur. Alors il faudra trouver une autre fonction, g', qui associera la variable en jeu avec l'individu du domaine concerné. La question est alors de régler le lien entre g et g'.

Pour cela, on introduit la notation : $g[y/d]$ = affectation g, sauf pour $y \mapsto d$. Alors on peut écrire :

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\exists y\ \varphi) = 1 \text{ ssi il existe un } d \in D \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

de même,

$$\boxed{V_{\mathcal{M},g}(\forall y\ \varphi) = 1 \text{ ssi pour tout } d \in D,\ V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1}$$

Finalement, si φ est une phrase, son interprétation ne dépend pas de l'affectation g. Alors on dira, pour toute **phrase** φ :

$$\underline{V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1 \text{ ssi il existe une affectation } g \text{ tel que } V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1}$$

(0) $V_{\mathcal{M}}(\varphi) = 1$

ssi

il existe une affectation g tel que $V_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$

(i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 ... t_n$ une constante ~~ou une variable~~ du vocabulaire de L, alors :

$$V_{\mathcal{M},g}(A(t_1, \ldots t_n)) = 1$$

ssi

$$\langle [\![t_1]\!]_{\mathcal{M},g}, ... [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},g} \rangle \in I(A)$$

(ii) Si φ est une formule dans L, alors :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\neg\varphi) = 1$$

ssi

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 0$$

(iii) Si φ et ψ sont des formules dans L, alors :

$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \wedge \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 1$	$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \vee \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 0$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 0$
$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \rightarrow \psi)) = 0$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = 1$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi) = 0$	$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ ssi $\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\varphi) = \mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\psi)$

(iv) Si φ est une formule et x une variable, alors :

$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\forall x\varphi) = 1$ ssi pour tout $d \in D$ $V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$	$\mathcal{V}_{\mathcal{M},g}(\exists x\varphi) = 1$ ssi il existe un $d \in D$ tel que $V_{\mathcal{M},g[y/d]}(\varphi) = 1$