Ch1. Quantification et compositionnalité

1. Retour sur la quantification

1.1 Quantification non restreinte

$\forall x \quad \exists x$

<u>Domaine de quantification</u> / Univers de discours

→ $\forall x\, Ex$ E : éphémère.

→ Tout est éphémère.

Tout le monde dort.

Quantification (logique) : non restreinte.

$\forall x \; Ax$

$\exists x \; Fx \ldots$

$\rightarrow$ Totalité du domaine de quantification

G : gentil

$$\frac{\forall x \; Gx}{\exists x \; Gx}$$

"Tout est gentil."

$\neq$ Tout le monde est gentil.

universelle : restreinte

(on ne parle que des personnes)

$\forall x \, (Px \rightarrow Gx)$

$\forall x$: - domaine implicite

- domaine non restreint

Interdéfinissabilité

Carré d'opposition :

Tout est éphémère

$\forall x Ex$

$\neg \exists x \neg Ex$

Certaines choses st éph.

Il y a (au moins) une chose éphémère

$\exists x Ex$

$\neg \forall x \neg Ex$

$$\boxed{\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi}$$

contradiction

(négation)

Rien n'est éphémère

$\forall x \neg Ex$

$\neg \exists x Ex$

Il y a au moins une chose non éphém.

$\exists x \neg Ex$

$\neg \forall x Ex$

$\neg \exists x\, Ex$

$\neg \underbrace{\exists x \neg \underbrace{Ex}}$ $\qquad \neg\neg \varphi \equiv \varphi$

$\neg \underbrace{\exists x \neg Ex} \neq \exists x\, Ex$

1.2 Quantification restreinte

Tous les $\underbrace{\text{profs}}_{\text{restriction}}$ sont $\underbrace{\text{gentils}}_{\text{portée (scope)}}$.

Quantif universelle

$\forall x\, (Px \to Gx)$

$\cancel{\forall x\, Gx}$

$$\forall x \, (Px \to Gx)$$

$$0 \to 0 = 1$$

$$0 \to 1 = 1$$

$$\left(P(\text{ma brosse à dents}) \to \neg G(\text{ma brosse à dents}) \right)$$

$$(Px \to \neg Gx)$$

$$P(\text{Amsili}) \to \neg G(\text{Amsili})$$

$$1 \to 0 = 0$$

$$\cancel{\exists x \, \neg Gx}$$

$$\cancel{\exists x \, \neg (Px \to Gx)}$$

$$\cancel{\exists x \, (Px \to \neg Gx)}$$

$$\exists x \, (Px \land \neg Gx)$$

Tous les profs st gentils

$\forall x \, (Px \to Gx)$

$\neg \exists x \, (Px \wedge \neg Gx)$

Certains profs sont gentils

$\exists x \, (Px \wedge Gx)$

$\neg \forall x \, (Px \to \neg Gx)$

Aucun prof n'est gentil

$\forall x \, (Px \to \neg Gx)$

$\neg \exists x \, (Px \wedge Gx)$

$\exists x \, (Px \wedge \neg Gx)$

$\neg \forall x \, (Px \to Gx)$

Il y a un prof non-gentil

Tous les profs sont gentils & compétents.

$$\forall x \ \big(\underbrace{Px}_{\text{restr.}} \rightarrow \underbrace{(Gx \wedge Cx)}_{\text{scope}} \big)$$

$$\neg \exists x \ \big(Px \wedge \neg (Gx \wedge Cx) \big)$$

$$\neg \exists x \ \big(Px \wedge (\neg Gx \vee \neg Cx) \big)$$

Tous les profs malades sont gentils.

$$\forall x \ \big((Px \wedge Mx) \rightarrow Gx \big)$$

$$\neg \exists x \ \big((Px \wedge Mx) \wedge \neg Gx \big)$$

$\underbrace{\forall x \in \mathbb{N}}_{\text{restrict}}, \; \exists \underbrace{\varepsilon > 0}\; \ldots$

$\forall x \left(\underbrace{x \in \mathbb{N}} \rightarrow \ldots \ldots \right)$