Table des matières

2.3 Syntaxe

2.3.1 Formules bien formées

Définition 1

(i) Si A est un nom de prédicat du vocabulaire de L, d'arité n, et chacun des $t_1 \ldots t_n$ une constante ou une variable du vocabulaire de L, alors $A(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule.

(ii) Si φ est une formule dans L, alors $\neg\varphi$ l'est aussi.

(iii) Si φ et ψ sont des formules dans L, alors $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, et $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sont des formules de L.

(iv) Si φ est une formule et x une variable, alors $\forall x\varphi$ et $\exists x\varphi$ sont des formules de L.

(v) Rien d'autre n'est une formule

(i) On appelle « arité » d'un prédicat le nombre d'arguments qu'il prend.

Exemple : A(j,s) P(k) D(j,c,k)

La règle (i) permet de construire des formules « atomiques ».

(ii) Exemple : $\neg$A(j,s)

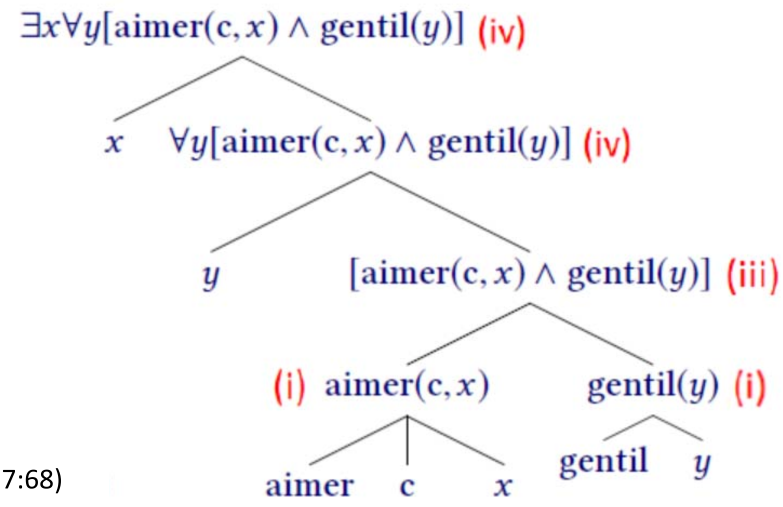
(iii) Exemple : (A(j,s) $\wedge$ P(s,a))

(iv) Exemple : $\forall$x A(j,s)

(v) « règle de clôture »

Illustration

$\exists x \forall y[\mathrm{aimer}(c, x) \wedge \mathrm{gentil}(y)]$



Roussarie (2017:68)

Sous-formule :

On dit que ψ est une SOUS-FORMULE de la formule φ si et seulement si ψ est une formule qui apparaît dans l'arbre de construction de φ.

2.3.2 Portée et variables libres/liées

Définition 2

Si $\forall x\psi$ est une sous-formule de φ, alors ψ est appelé la **portée** de cette occurrence du quantificateur $\forall x$ dans φ. Même définition pour $\exists x$.

Exemples

1. ∃x (Px ∧ Qx) : la portée de ∃x est (Px ∧ Qx)
2. (∃x Px ∧ Qx) : la portée de ∃x est Px
3. (∀x Ax ∧ ∀x Bx) : la portée du premier ∀x est Ax, celle du second ∀x est Bx
4. ¬∃x ∃y (∀z (∃w A(z,w) → A(y,z)) ∧ A(x,y)) (Gamut 1991:76 ; Roussarie 2017:92)

Quantificateur	Portée
∃w	A(z,w)
∀z	(∃w A(z,w) → A(y,z))
∃y	(∀z (∃w A(z,w) → A(y,z)) ∧ A(x,y))
∃x	∃y (∀z (∃w A(z,w) → A(y,z)) ∧ A(x,y))

Définition 3

(a) Une occurrence d'une variable x dans la formule ϕ (qui n'est pas une partie d'un quantificateur) est dite **libre** si cette occurrence de x ne tombe pas dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ apparaissant dans ϕ.

(b) Si $\forall x\psi$ (ou $\exists x\psi$) est une sous-formule de ϕ et x est libre dans ψ, alors cette occurrence de x est dite **liée** par le quantificateur $\forall x$ (ou $\exists x$).

Exemples

1. ∀y A(x,y) : x est libre, y est liée
2. (∃x Px ∧ Qx) : x dans Px est liée, x dans Qx est libre
3. ∀x (Ax ∧ ∃x Bx) : x dans Ax est lié par ∀x ; x dans Bx est lié par ∃x, mais pas par ∀x, car il n'est pas libre dans la portée de ∀x. (Gamut 1991:77)

Définition 4

Une **phrase** est une formule sans variable libre.

Exemples :

Phrases (« formules fermées »)	Non phrases (« formules ouvertes »)
∀x (Ax ∧ ∃x Bx) M(s) ∀x Ax	(Ax ∧ ∃x Bx) M(x) ∀x Ay

Une fbf (formule bien formée) contenant une variable libre n'est pas évaluable.

2.4 Sémantique

2.4.1 Mondes possibles

2.4.2 Modèle extensionel

Dénotation des expressions de base de L

Expression	Dénotation
constante d'individu (c, p, m, g) prédicat à une place (dormir, être médecin)	individu ensemble de tous les individus qui le vérifient

Comment effectuer le calcul de la valeur de vérité de la formule atomique M(g) ? (Guillaume est médecin)

g dénote un individu ; M dénote un ensemble d'individus

M(g) est vraie si l'individu dénoté par g appartient à l'ensemble dénoté par M.

La dénotation d'un prédicat binaire (aimer, être le frère de) est un ensemble de couples d'individus (= une collection de deux objets dans un ordre précis) : tous les couples tels que leur premier membre vérifie vis-à-vis de leur second membre la relation exprimée par le prédicat. (Roussarie 2017:73)

Exemple :
La formule A(s,i), traduction de *Suzanne aime Isabelle*, est vraie si le couple constitué de la dénotation de s et de i appartient à la dénotation de A, qui est l'ensemble de tous les couples dont le premier individu aime le second. $\langle s,i \rangle \neq \langle i,s \rangle$

Généralisation
Dénotation d'un prédicat à *n* arguments (avec $n \geq 2$) : un ensemble de *n*-uplets d'individus (couples, triplets, quadruplets, etc.).

L'interprétation d'une phrase dépend de l'état du monde par rapport auquel on l'évalue → notion de « mondes possibles ».

2.5 Propriétés

Equivalences remarquables