## Exercice 1

Pour chacune des formules du calcul des prédicats ci-dessous, indiquez la portée des quantificateurs et les variables libres et précisez s'il s'agit d'une phrase (exercice tiré de Gamut 1991a:77).

1. $\exists x\ (Axy \wedge Bx)$
2. $\exists x\ Axy \wedge Bx$
3. $\exists x \exists y\ Axy \rightarrow Bx$
4. $\exists x\ (\exists y\ Axy \rightarrow Bx)$
5. $\neg\exists x \exists y\ Axy \rightarrow Bx$
6. $\forall x \neg\exists y\ Axy$
7. $\neg Bx \rightarrow (\neg\forall y\ (\neg Axy \vee Bx) \rightarrow Cy)$

1. $\exists x\ (Axy \vee By)$
2. $\exists x\ Axx \vee \exists y\ By$
3. $\exists x\ (\exists y\ Axy \vee By)$
4. $\forall x \forall y\ ((Axy \wedge By) \rightarrow \exists w\ Cxw)$
5. $\forall x\ (\forall y\ Ayx \rightarrow By)$
6. $\forall x \forall y\ Ayy \rightarrow Bx$

Corrigé

| | *Quantific.* | *Portée* | *Variables libres* | *Phrase* |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $\exists x$ | $Axy \wedge Bx$ | $y$ | *non* |
| 2. | $\exists x$ | $Axy$ | $y$ | *non* |
| | | | $x$ *dans* $Bx$ | |
| 3. | $\exists x$ | $\exists y\ Axy$ | $x$ *dans* $Bx$ | *non* |
| | $\exists y$ | $Axy$ | | |
| 4. | $\exists x$ | $\exists y\ Axy \rightarrow Bx$ | *aucune* | *oui* |
| | $\exists y$ | $Axy$ | | |
| 5. | $\exists x$ | $\exists y\ Axy$ | $x$ *dans* $Bx$ | *non* |
| | $\exists y$ | $Axy$ | | |
| 6. | $\forall x$ | $\neg\exists y\ Axy$ | *aucune* | *oui* |
| | $\exists y$ | $Axy$ | | |
| 7. | $\forall y$ | $\neg Axy \vee Bx$ | $x$ | *non* |
| | | | $y$ *dans* $Cy$ | |
| 8. | $\exists x$ | $Axy \vee By$ | $y$ | *non* |
| 9. | $\exists x$ | $Axx$ | *aucune* | *oui* |
| | $\exists y$ | $By$ | | |
| 10. | $\exists x$ | $\exists y\ Axy \vee By$ | $y$ *dans* $By$ | *non* |
| | $\exists y$ | $Axy$ | | |
| 11. | $\forall x$ | $\forall y\ ((Axy \wedge By) \rightarrow \exists w\ Cxw$ | *aucune* | *oui* |
| | $\forall y$ | $(Axy \wedge By) \rightarrow \exists w\ Cxw$ | | |
| | $\exists w$ | $Cxw$ | | |
| 12. | $\forall x$ | $\forall y\ Ayx \rightarrow By$ | $y$ *dans* $By$ | *non* |
| | $\forall y$ | $Axy$ | | |
| 13. | $\forall x$ | $\forall y\ Ayy$ | $x$ *dans* $Bx$ | *non* |
| | $\forall y$ | $Ayy$ | | |

## Exercice 2

Traduire en logique des prédicats les phrases suivantes, en donnant plusieurs formules en cas d'ambiguïté. On représentera la dénotation des noms propres et des descriptions définies par des constantes.

(1) a. Tous les journaux qui n'ont pas de lecteurs vont disparaître s'ils ne trouvent pas un repreneur.
b. Soit tout le monde prend une boisson, soit personne n'en prend.
c. Quand tous les députés contestent une motion, elle est rejetée.
d. Paul déteste les gens qui n'aiment personne sauf lui.
e. Jean et Max ne connaissent pas tous les invités.

........................................ Corrigé ........................................

L'énoncé laissait ouverte la possibilité que les phrases soient ambiguës, car avec un peu de cet esprit retors qui caractérise la personne férue de sémantique, il est bien rare qu'on ne puisse pas trouver une ambiguïté; mais dans cette série de phrases, il y a peu d'ambiguïtés vraiment plausibles...

(2) a. Tous les journaux qui n'ont pas de lecteurs vont disparaître s'ils ne trouvent pas un repreneur.

| | |
|---|---|
| *Tous les A B si C* | $\forall x\ (Ax \to (Cx \to Bx))$ |
| $\equiv$ | $\forall x\ ((Ax \wedge Cx) \to Bx)$ |
| *x est un journal qui n'a pas de lecteurs* | $Jx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge Lyx)$ |
| *x ne trouve pas un repreneur* | $\neg\exists z\ (Rz \wedge Txz)$ |
| ((2-a)) $\forall x\ \big((Jx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge Lyx)) \to (\neg\exists z\ (Rz \wedge Txz) \to Dx)\big)$ | |

Si c'est le même repreneur (interprétation peu accessible) :

$$\exists z\ (Rz \wedge \forall x\ \big((Jx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge Lyx)) \to (\neg Txz) \to Dx)\big)$$

b. Soit tout le monde prend une boisson, soit personne n'en prend.

| | |
|---|---|
| *Soit P, soit Q* | $\big(P \vee Q\big)$ |
| *tout le monde prend une boisson* | $\forall x\ (Px \to \exists y\ (By \wedge Txy))$ |
| *personne n'en prend [de boisson]* | $\forall x\ (Px \to \neg\exists y\ (By \wedge Txy))$ |
| (2-b) $\big(\forall x\ (Px \to \exists y\ (By \wedge Txy)) \vee \forall x\ (Px \to \neg\exists y\ (By \wedge Txy))\big)$ | |

On peut imaginer que c'est la même boisson (encore moins accessible) :

$$\exists y\ (By \wedge (\forall x\ (Px \to Txy) \vee \forall x\ (Px \to \neg Txy)))$$

c. Quand tous les députés contestent une motion, elle est rejetée.
Donkey sentence : la version strictement compositionnelle donne une formule ouverte, la seconde formule proposée ci-après est la seule possible.

| | |
|---|---|
| *Quand P, (alors) Q* | $\big(P \to Q\big)$ |
| *tous les députés contestent une motion* | $\exists y\ (My \wedge \forall x\ (Dx \to Cxy))$ |
| *elle est rejetée* | $Rx$ |
| | $\cancel{\big(\exists y\ (My \wedge \forall x\ (Dx \to Cxy)) \to Ry\big)}$ |
| ((2-c)) | $\forall y\ \big((My \wedge \forall x\ (Dx \to Cxy)) \to Ry\big)$ |

Plusieurs étudiants ont proposé la formule suivante, ou une variante, qui ne correspond pas à la phrase (2-c), mais à la phrase *Quand un député conteste une motion, elle est rejetée*. Ce n'est pas une donkey sentence, et on peut la représenter par les deux formules suivantes.

$$\forall y\ (My \to (\exists x\ (Dx \wedge Cxy) \to Ry))$$
$$\forall y \forall x\ (My \to ((Dx \wedge Cxy) \to Ry))$$

d. Paul déteste les gens qui n'aiment personne sauf lui.

| | |
|---|---|
| *x n'aime personne sauf Paul* | $Axp \wedge \forall y((Py \wedge y \neq p) \to \neg Axy)$ |
| ((2-d)) | $\forall x(Px \to ((Axp \wedge \forall y((Py \wedge y \neq p) \to \neg Axy)) \to Dpx))$ |

e. Jean et Max ne connaissent pas tous les invités.
interprétation 1 : $\neg\forall x(Ix \to (Cjx \wedge Cmx))$
interprétation 2 : $\forall x(Ix \to (\neg Cjx \wedge \neg Cmx))$

## Exercice 3

Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats, en préservant autant de structure que possible, et en donnant chaque fois la légende.

(3) a. S'il y a un bruit, Alice pleure.
b. S'il y a un bruit, tout le monde pleure.
c. S'il y a un bruit, Alice <u>le</u> cherche.

............................................ Corrigé ............................................

(4) a. S'il y a un bruit, Alice pleure. $\forall x(Bx \to Pa)$ ou $(\exists x Bx \to Pa)$
b. S'il y a un bruit, tout le monde pleure.
$(\exists x Bx \to \forall y(Hy \to Py))$ <u>**ou**</u> $\forall x(Bx \to \forall y(Hy \to Py))$ <u>**ou**</u> $\forall x\forall y((Bx \wedge Hy) \to Py)$
c. S'il y a un bruit, Alice <u>le</u> cherche. $\forall x(Bx \to Cax)$ <u>mais **pas**</u> $(\exists x Bx \to Ca\underline{x})$

## Exercice 4

Les phrases suivantes se caractérisent par le fait que l'indéfini, sous la portée d'une quantification universelle, s'interprète de façon universelle. Cette situation n'est pas surprenante si on connaît l'équivalence entre $\forall x(\varphi \to \psi)$ et $(\exists x\varphi \to \psi)$ (si $\psi$ ne contient pas d'occurrence libre de $x$). Sur la base de cette équivalence, proposez pour chaque phrase deux traductions en logique des prédicats équivalentes.

(5) a. Paul se fâche dès que quelqu'un fait du bruit
b. Tout le monde se fâche si quelqu'un fait du bruit
c. Tous les touristes qui visitent Paris sont riches
d. Tous les touristes qui visitent Paris l'aiment
e. Tous les touristes qui visitent une ville sont riches
f. Tous les touristes qui visitent une ville l'aiment
g. Si un fermier possède un âne, il le bat
h. Tout le monde est marqué par un amour déçu

............................................ Corrigé ............................................

*cf. solution manuscrite*