

2.5 Propriétés

Equivalences remarquables

- Les variables sont « muettes » :

$$\forall x Fx \equiv \forall y Fy$$

Mais attention à la « capture » :

$$\forall x (Fx \wedge Gy) \not\equiv \forall y (Fy \wedge Gy)$$

- Règles de dualité (loi de *de Morgan*)

$$\forall x \alpha \equiv \neg \exists x \neg \alpha$$

par exemple :

$$\forall x Ex \equiv \neg \exists x \neg Ex$$

Tout est éphémère \approx *Rien n'est éternel* (\approx non éphémère)

$$\forall x (Px \rightarrow Gx) \equiv \neg \exists x (Px \wedge \neg Gx)$$

Tous les profs sont gentils \approx *Il n'y a pas de prof non gentil*

Autres formes :

$$\exists x \alpha \equiv \neg \forall x \neg \alpha$$

$$\neg \exists x \alpha \equiv \forall x \neg \alpha$$

$$\neg \forall x \alpha \equiv \exists x \neg \alpha$$

- Règles de distribution :

$\forall x (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x \alpha \wedge \forall x \beta)$ <p><i>Tout est rare et cher</i> \approx <i>Tout est rare et tout est cher</i></p> <p>Mais :</p> $\forall x (\alpha \vee \beta) \not\equiv (\forall x \alpha \vee \forall x \beta)$ <p><i>Tout est soit éphémère soit durable</i> $\not\approx$ <i>Soit tout est éphémère soit tout est durable</i></p>
--

$\exists x (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x \alpha \vee \exists x \beta)$ <p>Mais :</p> $\exists x (\alpha \wedge \beta) \not\equiv (\exists x \alpha \wedge \exists x \beta)$
--

$\exists x (\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\forall x \alpha \rightarrow \exists x \beta)$
--

- Règles de distribution conditionnelle ($\bar{\beta}$ ne contient pas d'occurrence libre de x)

$$\bar{\beta} \equiv \forall x \bar{\beta}$$

$$\bar{\beta} \equiv \exists x \bar{\beta}$$

$$\forall x (\alpha \vee \bar{\beta}) \equiv (\forall x \alpha \vee \bar{\beta})$$

$$\exists x (\alpha \wedge \bar{\beta}) \equiv \exists x \alpha \wedge \bar{\beta}$$

$$\forall x (\alpha \rightarrow \bar{\beta}) \equiv \exists x \alpha \rightarrow \bar{\beta}$$

Toute entité est telle que si elle se casse, il y a du bruit \approx *Si quelque chose se casse, il y a du bruit*

$$\forall x (\bar{\beta} \rightarrow \alpha) \equiv \bar{\beta} \rightarrow \forall x \alpha$$

Pour toute personne, s'il y a du bruit, elle est fâchée \approx *S'il y a du bruit, tout le monde est fâché*