

# Sémantique formelle

## Chapitre 2

## Logique des prédicats

Table des matières	
<b>2 Logique des prédicats</b>	<b>1</b>
2.1 Prédicats	1
2.1.1 Limites de la logique propositionnelle	1
2.1.2 Phrases catégoriques	2
2.1.3 Généralisation : prédicats $n$ -aires	3
2.2 Quantificateurs	4
2.2.1 Notion de quantificateur	4
2.2.2 Quantification non restreinte	5
2.2.3 Quantification restreinte	7
2.3 Syntaxe	9
2.3.1 Formules bien formées	9
2.3.2 Portée et variables libres/liées	9
2.4 Sémantique	9
2.4.1 Mondes possibles	9
2.4.2 Modèles extensionnel	9
2.5 Propriétés	9

$$\begin{array}{c}
 (P \rightarrow Q) \\
 P \\
 \hline
 Q
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} (P \rightarrow Q) \\ P \\ \hline Q \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{modus} \\ \text{ponens} \end{array}$$

## 2.1 Prédicats

### 2.1.1 Limites de la logique propositionnelle

(1) Si Jean est malade, il ne sort pas  
 Jean est malade  
 -----  
 Jean ne sort pas

$$\frac{P \rightarrow Q}{P} Q$$

(2) Si un homme est malade, il ne sort pas  
 Jean est un homme malade  
 -----  
 Jean ne sort pas

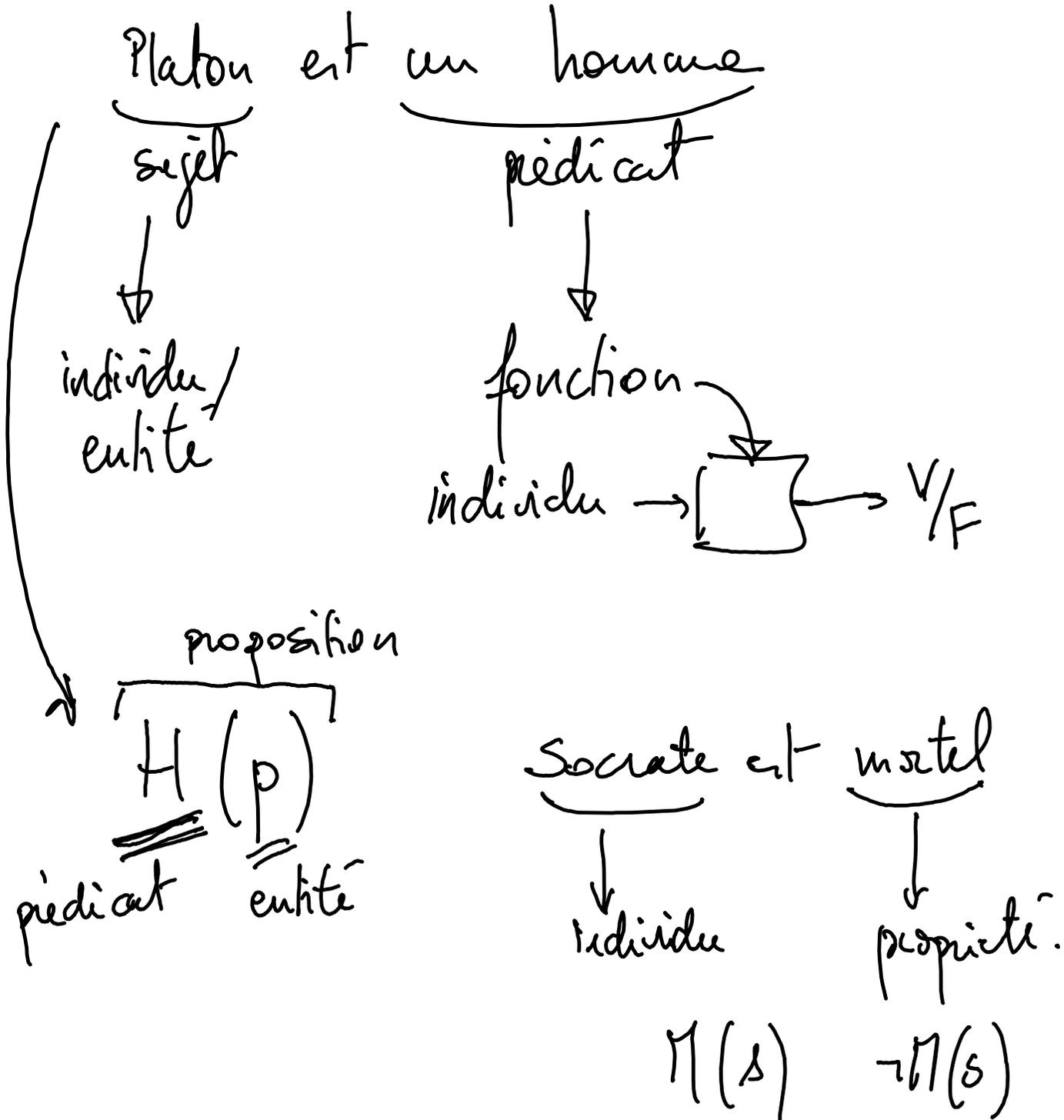
$$\left. \begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ R \end{array} \right\} \neg S$$

Prédicat ↗ ↘

2.1.2 Phrases catégoriques

- (3) a. Platon est un homme
- b. Socrate est mortel
- c. Le train siffle
- d. Cette bouilloire fuit

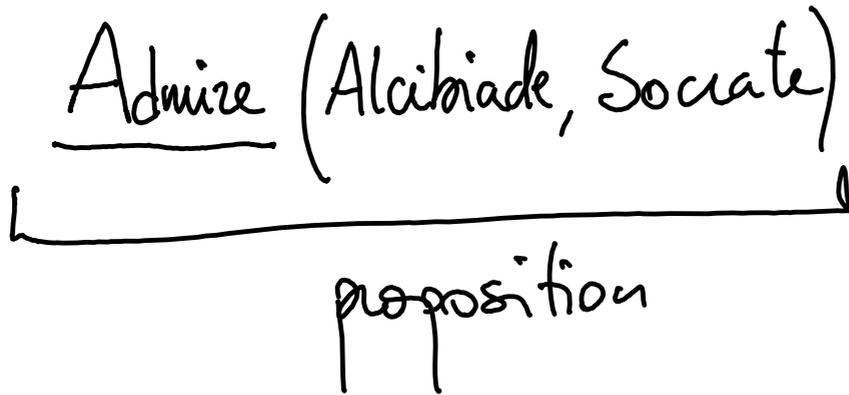
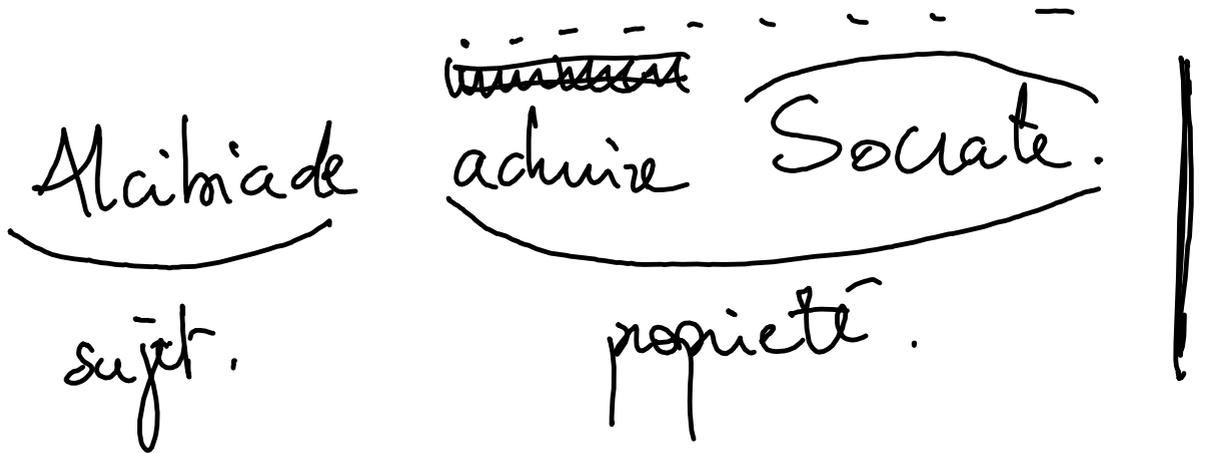
Le train siffle  $S(t)$



2.1.3 Généralisation : prédicats  $n$ -aires

$$(\eta(s) \wedge \eta(a))$$

- (4) a. Jean est plus grand que Paul  
 b. Pierre plume le poulet  
 c. Alcibiade admire Socrate



Frege

mortel : prédicat unaire (1 argument)  
 admire : prédicat binaire (2 arguments)  
 présenter : — ternaire (3 —)



- (5) a. Il pleut.  
 b. Luce voit son frère.  
 c. Anouk a présenté sa mère à Juno.  
 d. Max ressemble plus à Jules que son frère à sa mère.

$$P(a, s, j) \quad \vee (l, f)$$

$$R(m, j, f, s)$$

## 2.2 Quantificateurs

### 2.2.1 Notion de quantificateur

- (6) a. Pierre est gentil.  
 b. Personne n'est gentil.  
 c. Ils sont tous gentils.

 $G(p)$ 

tous sont gentils.

 $G(a) \wedge G(b) \wedge G(c) \dots$ 

$\forall x G(x)$   $\rightarrow$

universel  $\downarrow$  variable (d'individu)

Frege

$\forall x G(x)$  : tout est gentil.

$\exists x \neg G(x)$  : rien n'est gentil.

$\forall x G(x)$   $\eta(s) \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 0 \end{cases}$

## 2.2.2 Quantification non restreinte

Tout est éphémère

Tout est éphémère

$$\forall x E(x)$$

$$\neg \exists x \neg E(x)$$

Il y a une chose  
qui est éphémère

$$\exists x E(x)$$

$$\neg \forall x \neg E(x)$$

Aucune chose  
Rien n'est éphémère

$$\forall x \neg E(x)$$

$$\neg \exists x E(x)$$

Il y a une chose  
qui est non éphémère

$$\exists x \neg E(x)$$

$$\neg \forall x E(x) \quad \Leftrightarrow$$

"Loi d'opposition".

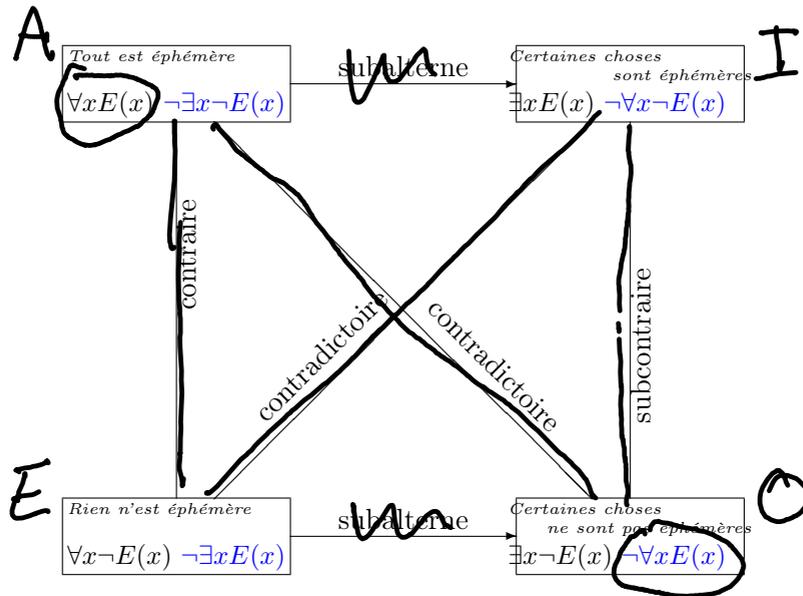


FIGURE 2.1 – Carré d'Aristote, quantification non restreinte

-  $\forall/\exists$  interdéfinissables  
 - A I E O

Univers de discours / domaine de quantification

Rien ne marche !       $\forall x \neg \pi(x)$   
 Tout le monde dort !

### 2.2.3 Quantification restreinte

(7) Tous les profs sont gentils.

Tous les profs sont gentils.

$$\text{---} \forall x G(x) \text{---}$$

$$\text{---} \forall x \in P, G(x) \text{---}$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow G(x))$$