

Exercice (4) Montrez que, quelles que soient les valeurs de p , q et r , les formules de chacune de paires suivantes sont logiquement équivalentes.

Pour rappel : Deux formules sont logiquement équivalentes, si et seulement si elles ont les mêmes valeurs de vérité dans toutes les conditions. Pour vérifier cela, nous devons faire les tables de vérité de chacune des deux formules et comparer les deux colonnes.

Pour une explication détaillée de la démarche voir **Corrigé P3 (ex. 2ib)**

1) $\neg\neg P$ et P

$\neg\neg P$		
P	$\neg P$	$\neg\neg P$
1	0	1
0	1	0

P	
1	Les deux colonnes sont identiques : CQFD
0	Les deux formules sont logiquement équivalentes

2) $P \wedge P$ et P

$P \wedge P$		
P	P	$P \wedge P$
1	1	1
0	0	0

P	
1	Les deux colonnes sont identiques : CQFD
0	Les deux formules sont logiquement équivalentes

3) $P \vee P$ et P

$P \vee P$		
P	P	$P \vee P$
1	1	1
0	0	0

P	
1	Les deux colonnes sont identiques : CQFD
0	Les deux formules sont logiquement équivalentes

4) $P \rightarrow Q$ et $\neg P \vee Q$

$P \rightarrow Q$		
P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$\neg P \vee Q$				
P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	
1	1	0	1	Les deux colonnes sont identiques : CQFD Les deux formules sont logiquement équivalentes
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	1	

5) $\neg(P \rightarrow Q)$ et $P \wedge \neg Q$

$\neg(P \rightarrow Q)$			
P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

$P \wedge \neg Q$				
P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	
1	1	0	0	Les deux colonnes sont identiques : CQFD Les deux formules sont logiquement équivalentes
1	0	1	1	
0	1	0	0	
0	0	1	0	

6) $P \rightarrow Q$ et $\neg(P \wedge \neg Q)$

$P \rightarrow Q$			$\neg(P \wedge \neg Q)$				
P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD
Les deux formules sont logiquement équivalentes

7) $P \rightarrow Q$ et $\neg Q \rightarrow \neg P$

$P \rightarrow Q$			$\neg Q \rightarrow \neg P$				
P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD
Les deux formules sont logiquement équivalentes

8) $P \leftrightarrow Q$ et $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

\leftrightarrow : équivalence/bi-implication (P et Q sont équivalentes)

$P \leftrightarrow Q$			$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$				
P	Q	$P \leftrightarrow Q$	P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes

9) $P \leftrightarrow Q$ et $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$P \leftrightarrow Q$			$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$						
P	Q	$P \leftrightarrow Q$	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes

10) $\neg(P \wedge Q)$ et $\neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \wedge Q)$				$\neg P \vee \neg Q$				
P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD
Les deux formules sont logiquement équivalentes

11) $\neg(P \vee Q)$ et $\neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \vee Q)$				$\neg P \wedge \neg Q$				
P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1

Les deux colonnes sont identiques : CQFD
 Les deux formules sont logiquement équivalentes

12) $P \vee (Q \vee R)$ et $(P \vee Q) \vee R$

$P \vee (Q \vee R)$					$(P \vee Q) \vee R$				
P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	P	Q	R	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \vee R$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes

13) $P \wedge (Q \wedge R)$ et $(P \wedge Q) \wedge R$

$P \wedge (Q \wedge R)$					$(P \wedge Q) \wedge R$				
P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$	P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes

14) $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \wedge (Q \vee R)$				$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$						
P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes

15) $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \vee (Q \wedge R)$				$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$						
P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les deux colonnes sont identiques : CQFD -> Les deux formules sont logiquement équivalentes