TD de Sémantique formelle et logique – Pegah Faghiri
Logique des propositions Eléments de correction (en remplacement de cours en présentiel) – PARTIE 4

Dans ce qui suit vous avez un corrigé détaillé de l'exercice 3

Exercice (3) Montrez, en représentant chaque phrase en logique propositionnelle, et en utilisant une table de vérité, que (1a) implique logiquement (1b), et que (2a) et (2b) sont équivalentes.

(1) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.
b. Il est faux que Paul est venu.

(2) ~~a. Pour que l'entreprise redémarre, il faut changer son PDG, il suffit de changer son PDG.~~
~~b. Il n'est pas vrai que l'entreprise ne redémarre pas ni que son PDG a changé.~~

a. Pour que l'entreprise redémarre, il suffit de changer son PDG.
b. Il n'est pas vrai que l'entreprise ne redémarre pas bien que son PDG ait changé.

NB. Les phrases (2a) et (2b) sont modifiées (ne pas tenir compte des versions initiales).

Pour vous aider dans l'exercice (1) voici les tdv d'une conjonction et d'une disjonction à trois propositions élémentaires :

A	B	C	A ∧ B ∧ C
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

A	B	C	A ∨ B ∨ C
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

NB. : 1 = Vraie / 0 = Fausse

Pour les explications détaillées voir le corrigé P3 (exercice 2.i)

(1) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.
b. Il est faux que Paul est venu.

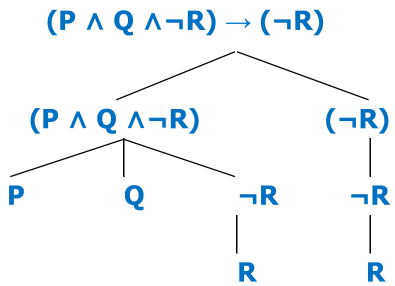
Nous devons d'abord traduire ces phrases en logique propositionnelle. Nos propositions élémentaires sont :
P : Pierre est venu
Q : Marie est venue
R : Paul est venu

a. Pierre est venu **et** Marie est venue **et il est faux que** Paul est venu : P et Q et non A = P ∧ Q ∧ ¬R
b. **Il est faux que** Paul est venu : non R = ¬R

Il faut montrer que la formule « (1a) implique logiquement (1b) » est une tautologie à l'aide d'une table de vérité composite : (1a) implique logiquement (1b) = **(P ∧ Q ∧¬R) → (¬R)**

(P ∧ Q ∧¬R) → (¬R) :

P	Q	R	¬R	P ∧ Q ∧ ¬R	¬R	**(P ∧ Q ∧¬R) → (¬R)**
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1



La formule « (P ∧ Q ∧¬R) → (¬R) » est toujours vraie / est une tautologie : CQFD -> (1a) implique logiquement (1b)

Pour la solution alternative basée sur la paraphrase « (1b) est la conséquence logique de (1a) » voir le corrigé P3 (exercice 2.i-a)

(2) a. Pour que l'entreprise redémarre, il suffit de changer son PDG.

b. Il n'est pas vrai que l'entreprise ne redémarre pas bien que son PDG ait changé.

Nous devons d'abord traduire ces phrases en logique propositionnelle. Nos propositions élémentaires sont :

P : l'entreprise redémarre

Q : le PDG (de l'entreprise) change

a. **Pour que** l'entreprise redémarre**, il suffit que** le PDG (de l'entreprise) change : Pour P, il suffit de Q

Nous avons une conditionne suffisante (cf. corrigé P1) qu'il est possible de paraphraser par « si Q, P » : a = $Q \rightarrow P$

b. **Il n'est pas vrai que (**l'entreprise ne redémarre pas **bien que** le PDG ait changé**)** :

Il est faux que (il est faux que (l'entreprise redémarre) **et** le PDG a changé**)**: non (non P et Q) = $\neg(\neg P \wedge Q)$

(2a) et (2b) sont logiquement équivalentes, si et seulement si, elles ont exactement les mêmes valeurs de vérité (dans toutes les conditions). Pour vérifier si c'est le cas, nous comparons les tables de vérité des deux formules :

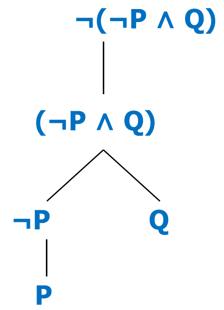
(2a) : $Q \rightarrow P$

P	Q	$Q \rightarrow P$
1	1	**1**
1	0	**1**
0	1	**0**
0	0	**1**

(2b) : $\neg(\neg P \wedge Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$\neg(\neg P \wedge Q)$
1	1	0	0	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	1	**0**
0	0	1	0	**1**

Obtenir les sous-formules :



Les colonnes correspondant à (2a) et (2b) sont identiques / les valeurs de vérité de (2a) et (2b) sont identiques : CQFD -> (2a) et (2b) sont logiquement équivalentes.