TD de Sémantique formelle et logique – Pegah Faghiri
Logique des propositions Eléments de correction (en remplacement de cours en présentiel) – PARTIE 3

Dans ce qui suit vous avez un corrigé détaillé de l'exercice 2.i

Exercice (2)

i. Montrez, en représentant chaque phrase en logique propositionnelle, et en utilisant une table de vérité, que
   (a) : (1) implique logiquement (2) Autrement dit : (2) est une conséquence logique de (1)
   (b) : (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

(1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
(2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
(3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
(4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que jean a réussi son examen

Pour rappel, voici les tables de vérité de base

négation :

A	¬A
1	0
0	1

conjonction (et) :

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

disjonction (ou) :

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

implication :

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

NB. : 1 = Vraie / 0 = Fausse

Nous traduisons d'abord ces phrases en logique propositionnelle. Nos propositions élémentaires sont :
P : Jean a réussi son examen
Q : Marie est contente

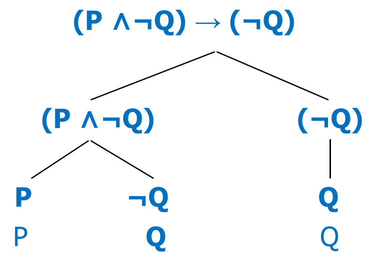
1) Jean a réussi son examen **et il n'est pas vrai que** Marie est contente (P et non Q) : P ∧¬Q
2) **Il n'est pas vrai que** Marie est contente (non Q) : ¬Q
3) Marie est contente **si** Jean a réussi son examen (si P alors Q) : P → Q
4) Marie est contente **ou il n'est pas vrai que** Jean a réussi son examen (Q ou non P) : Q ∨ ¬P

a) On peut répondre à cette question de deux façons :

1. On considère la formule « (1) implique logiquement (2) » : on doit montrer que cette formule est une tautologie à l'aide d'une table de vérité composite. (1) implique logiquement (2) = (1) → (2) : **(P ∧¬Q) → (¬Q)**

(P ∧¬Q) → (¬Q) :

P	Q	¬Q	P ∧¬Q	¬Q	**(P ∧¬Q) → (¬Q)**
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1



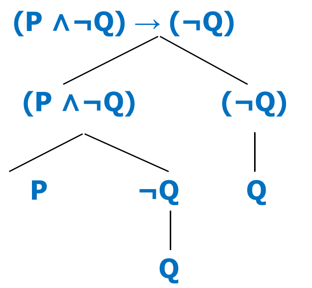
La formule « (P ∧¬Q) → (¬Q) » est toujours vraie / est une tautologie : CQFD -> (1) implique logiquement (2)

Explication de la démarche :

(P ∧¬Q) → (¬Q) : **1)** Pour obtenir cette formule nous avons besoin de ces sous-formules (cf. 1a)

Les sous-formules de (**P ∧¬Q**), sont **P** et **¬Q** (cf. 1b), etc.

1a)
1b)



2) On remplie la table dans l'ordre inverse :
¬Q
P ∧¬Q
(P ∧¬Q) → (¬Q)

P	Q	¬Q	P ∧¬Q	¬Q	**(P ∧¬Q) → (¬Q)**
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1

3) Dans la colonne (P ∧¬Q) → (¬Q), il n'y a que des 1, ce qui veut dire que formule est vraie dans toutes les conditions possibles autrement dit, c'est une tautologie.

2. On considère la paraphrase « (2) est une conséquence logique de (1) » : (2) est une conséquence logique de (1), si et seulement si, dans toutes les conditions où (1) est vraie, (2) l'est aussi. Pour vérifier si c'est le cas, nous comparons les tables de vérité des deux formules :

(1) : **P ∧ ¬Q**

P	Q	¬Q	**P ∧ ¬Q**
1	1	0	**0**
1	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**

(2) : **¬Q**

Q	**¬Q**
1	**0**
0	**1**

Dans toutes les conditions où (1) est vraie, (2) l'est aussi : CQFD -> (2) est une conséquence logique de (1), autrement dit, (1) implique logiquement (2).

Explication de la démarche

(1) :

P	Q	¬Q	**P ∧ ¬Q**
1	1	0	**0**
1	0	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**

(1) est vraie dans une seule condition :

(2) :

Q	**¬Q**
1	**0**
0	**1**

(1) :

P	Q	¬Q	**P ∧ ¬Q**
1	1	0	**0**
1	**0**	1	**1**
0	1	0	**0**
0	0	1	**0**

lorsque P est vraie et Q est fausse

(2) :

Q	**¬Q**
1	**0**
0	**1**

Dans cette condition (2) est également vraie.

b) (3) et (4) sont logiquement équivalentes, si et seulement si, elles ont exactement les mêmes valeurs de vérité (dans toutes les conditions). Pour vérifier si c'est le cas, nous comparons les tables de vérité des deux formules :

(3) : **P → Q**

P	Q	**P → Q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

(4) : **Q ∨ ¬P**

P	Q	¬P	**Q ∨ ¬P**
1	1	0	**1**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**1**

Les colonnes correspondant à (3) et (4) sont identiques / les valeurs de vérité de (3) et (4) sont identiques : CQFD -> (3) et (4) sont logiquement équivalentes.

Explication de la démarche

(3) :

P	Q	**P → Q**
1	1	**1**
1	0	**0**
0	1	**1**
0	0	**1**

(4) :

P	Q	¬P	**Q ∨ ¬P**
1	1	0	**1**
1	0	0	**0**
0	1	1	**1**
0	0	1	**1**

Dans toutes les conditions, c'est-à-dire dans les différentes combinaisons possibles des valeurs de P et Q, chacune représentée par une ligne dans la table, les deux formules ont exactement les mêmes valeurs de vérité.