

Dans ce qui suit vous avez un corrigé détaillé de l'exercice 2.ii

Exercice (2)

- i. Montrez, en représentant chaque phrase en logique propositionnelle, et en utilisant une table de vérité, que (1) implique logiquement (2) et que (3) et (4) sont logiquement équivalentes.
- (1) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente
 - (2) Il n'est pas vrai que Marie est contente
 - (3) Marie est contente si Jean a réussi son examen
 - (4) Marie est contente ou il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen
- ii. Calculez la valeur de vérité des phrases suivantes dans la situation où :
- a. Jean a réussi son examen, Marie est contente.
 - b. Jean a réussi son examen, Marie n'est pas contente.
 - c. Jean n'a pas réussi son examen, Marie est contente.
- 1) Jean a réussi son examen ou Marie est contente.
 - 2) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente.
 - 3) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente.
 - 4) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente.
 - 5) Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente.
 - 6) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente.

Nous traduisons d'abord ces phrases en logique propositionnelle. Ensuite, représentons les valeurs de vérité de chacune par une table de vérité composite (notez que seules les trois premières lignes de chaque table de vérité – correspondant aux situations a, b et c - sont pertinentes pour exercice 2.ii).

Les propositions élémentaires communes à toutes les phrases :

P : Jean a réussi son examen

Q : Marie est contente

Pour rappel : les connecteurs que nous verrons apparaître dans cet exercice sont

négation	« \neg »	non A	$\neg A$
conjonction	« \wedge »	A et B	$A \wedge B$
disjonction	« \vee »	A ou B	$A \vee B$
implication ou conditionnel	« \rightarrow »	Si A alors B	$A \rightarrow B$

Certaines phrases sont ambiguës. Par exemple, en 3 « Il n'est pas vrai que » peut avoir une portée large sur toute la phrase (cf. 3') ou seulement sur la première proposition (cf. 3''). Le cas échéant, nous désambiguïsons les phrases à l'aide des parenthèses.

3' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen et Marie est contente).

3'' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen) et Marie est contente.

- 1) Jean a réussi son examen **ou** Marie est contente. $\rightarrow P \vee Q$
- 2) Jean a réussi son examen **et il n'est pas vrai que** Marie est contente. $\rightarrow P \wedge \neg Q$
- 3) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen et Marie est contente.
 3' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen **et** Marie est contente). $\rightarrow \neg(P \wedge Q)$
 3'' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen) **et** Marie est contente. $\rightarrow \neg P \wedge Q$
- 4) **Il n'est pas vrai que** Jean a réussi son examen **ou il n'est pas vrai que** Marie est contente.
 $\rightarrow \neg P \vee \neg Q$
- 5) **Si** Jean a réussi son examen, **il n'est pas vrai que** Marie est contente. $\rightarrow \text{si } P, \neg Q : P \rightarrow \neg Q$
- 6) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen si Marie est contente.
 6' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen **si** Marie est contente) $\rightarrow \neg(Q \rightarrow P)$
 6'' : **Il n'est pas vrai que** (Jean a réussi son examen) **si** Marie est contente $\rightarrow \neg P \text{ si } Q : Q \rightarrow \neg P$

1) Jean a réussi son examen ou Marie est contente : $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

2) Jean a réussi son examen et il n'est pas vrai que Marie est contente : $P \wedge \neg Q$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « fausse »

3) 3' : Il n'est pas vrai que (Jean a réussi son examen et Marie est contente) : $\neg(P \wedge Q)$

3'' : Il n'est pas vrai que (Jean a réussi son examen) et Marie est contente : $\neg P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

P	Q	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

4) Il n'est pas vrai que Jean a réussi son examen ou il n'est pas vrai que Marie est contente : $\neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

5) Si Jean a réussi son examen, il n'est pas vrai que Marie est contente : $P \rightarrow \neg Q$

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow \neg Q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

6) 6' : Il n'est pas vrai que (Jean a réussi son examen si Marie est contente) : $\neg(Q \rightarrow P)$

6'' : Il n'est pas vrai que (Jean a réussi son examen) si Marie est contente : $Q \rightarrow \neg P$

P	Q	$Q \rightarrow P$	$\neg(Q \rightarrow P)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »

P	Q	$\neg P$	$Q \rightarrow \neg P$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	1

Dans la situation (a) P et Q sont toutes les deux vraies. (a) est représentée par la 1^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « fausse »

Dans la situation (b) P est vraie et Q est fausse. (b) est représentée par la 2^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (a) est « vraie »

Dans la situation (c) P est fausse mais Q est vraie. (c) est représentée par la 3^e ligne. Donc, la valeur de vérité de la phrase (1) dans la situation (c) est « vraie »