Formal Grammars

N° 9. Soit la grammaire

$$\begin{array}{ll} \mathrm{S} & \to \mathrm{A\ S\ B} \\ \mathrm{S} & \to \mathrm{a\ B} \\ \mathrm{aB} & \to \mathrm{ba} \\ \mathrm{A} & \to \mathrm{a} \end{array}$$

1. De quel type (dans la classification de Chomsky) est cette grammaire ?
2. Donnez deux exemples de mots engendrés par cette grammaire, en donnant à chaque fois la dérivation gauche.
3. Comment caractériser le langage engendré par cette grammaire ?
4. Peut-on proposer une grammaire indépendante du contexte (*context-free*) qui reconnaisse le même langage ?

N° 10. Donner une grammaire algébrique qui reconnaisse chacun des langages suivants (alphabet $X = \{a, b, c\}$).

— $L_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n \ ; \ n \geq 0\}$
— $L'_0 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n ca \ ; \ n \geq 0\}$
— $L_1 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n c^p ; n > 0 \text{ et } p > 0\}$
— $L_2 = \{w \in X^* \ / \ w = a^n b^n a^m b^m ; n, m \geq 1\}$
— $L'_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = |w|_b\}$
— $L_3 = \{w \in X^* \ / \ |w|_a = 2|w|_b\}$
— $L_4 = \{w \in X^* \ / \ \exists x \in X^* \text{ tq } w = x\overline{x}\}$
— $L_5 = \{w \in X^* \ / \ w = \overline{w}\}$

N° 11. Soient les deux grammaires suivantes. Pour chacune d'entre elles, donnez le langage engendré, et indiquez le type de la grammaire dans la classification de Chomsky. Commentez brièvement.

$$\begin{array}{lll} S & \to & S_1 S_2 \\ S_1 & \to & aS_1 b \mid ab \\ S_2 & \to & cS_2 \mid c \end{array} \qquad \begin{array}{lll} S & \to & aSBC \\ S & \to & aBC \\ CB & \to & BC \\ aB & \to & ab \\ bB & \to & bb \\ bC & \to & bc \\ cC & \to & cc \end{array}$$

N° 12. Soit l'alphabet $X = \{+, =, a\}$. (1) Donner une grammaire algébrique pour le langage L dont chaque mot représente une addition correcte de deux suites de caractères a. Par exemple L contient le mot $aa + aaaa = aaaaaa$. (2) Donner un automate à pile qui reconnaît le même langage.

N° 13. Une grammaire algébrique $G = \langle X, V, S, P\rangle$ est dite *simple* si elle vérifie les deux conditions :

$P \subset V \times XV^*$
$\forall A \in V, \forall x \in X, \forall u, u' \in (X \cup V)^*, (A \to xu) \in P \wedge (A \to xu') \in P \Rightarrow (u = u')$

Un langage algébrique est un *langage simple* s'il existe un grammaire simple qui l'engendre.

1. Trouver une grammaire simple pour le langage $\{a^n b^{n+1}, n \geq 0\}$
2. Trouver une grammaire simple pour le langage $\{a^n b^n, n > 0\}$
3. Soit L le langage engendré par : $S \longrightarrow aSS \mid b$. Construire une grammaire algébrique qui engendre le langage Lc^*d.
4. Montrer que la concaténation de deux langages simples est un langage simple. On demande une explication rigoureuse, pas nécessairement une démonstration mathématique.

N° 14. Soit la grammaire suivante : $\mathcal{G}_1 = \langle \{a, b\}, \{S\}, S, \{\ S \ \to \ aSbS | bSaS | \varepsilon \ \}\rangle$.

1. Quel est le langage reconnu ?
2. Proposer une grammaire $\mathcal{G}_2$ ε-libre qui reconnaît le même langage.
3. Dessiner deux arbres de dérivation qui correspondent à l'analyse du mot $aabbaabbbaab$ au moyen des deux grammaires $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.