Exercice 1

Pour chacune des formules du calcul des prédicats ci-dessous, indiquez la portée des quantificateurs et les variables libres et précisez s'il s'agit d'une phrase (exercice tiré de Gamut 1991a:77).

1. $\exists x\ (Axy \land Bx)$
2. $\exists x\ Axy \land Bx$
3. $\exists x \exists y\ Axy \to Bx$
4. $\exists x\ (\exists y\ Axy \to Bx)$
5. $\neg \exists x \exists y\ Axy \to Bx$
6. $\forall x \neg \exists y\ Axy$
7. $\neg Bx \to (\neg \forall y\ (\neg Axy \lor Bx) \to Cy)$

1. $\exists x\ (Axy \lor By)$
2. $\exists x\ Axx \lor \exists y\ By$
3. $\exists x\ (\exists y\ Axy \lor By)$
4. $\forall x \forall y\ ((Axy \land By) \to \exists w\ Cxw)$
5. $\forall x\ (\forall y\ Ayx \to By)$
6. $\forall x \forall y\ Ayy \to Bx$

Corrigé

	Quantific.	*Portée*	*Variables libres*	*Phrase*
1.	$\exists x$	$Axy \land Bx$	y	*non*
2.	$\exists x$	Axy	y	*non*
			x *dans* Bx	
3.	$\exists x$	$\exists y\ Axy$	x *dans* Bx	*non*
	$\exists y$	Axy		
4.	$\exists x$	$\exists y\ Axy \to Bx$	*aucune*	*oui*
	$\exists y$	Axy		
5.	$\exists x$	$\exists y\ Axy$	x *dans* Bx	*non*
	$\exists y$	Axy		
6.	$\forall x$	$\neg \exists y\ Axy$	*aucune*	*oui*
	$\exists y$	Axy		
7.	$\forall y$	$\neg Axy \lor Bx$	x	*non*
			y *dans* Cy	
8.	$\exists x$	$Axy \lor By$	y	*non*
9.	$\exists x$	Axx	*aucune*	*oui*
	$\exists y$	By		
10.	$\exists x$	$\exists y\ Axy \lor By$	y *dans* By	*non*
	$\exists y$	Axy		
11.	$\forall x$	$\forall y\ ((Axy \land By) \to \exists w\ Cxw$	*aucune*	*oui*
	$\forall y$	$(Axy \land By) \to \exists w\ Cxw$		
	$\exists w$	Cxw		
12.	$\forall x$	$\forall y\ Ayx \to By$	y *dans* By	*non*
	$\forall y$	Axy		
13.	$\forall x$	$\forall y\ Ayy$	x *dans* Bx	*non*
	$\forall y$	Ayy		

Exercice 2

Traduire les phrases suivantes en logique des *prédicats*

(1) a. Quand quelqu'un fait confiance à quelqu'un qui a trompé tout le monde, il a tort.
b. Il n'y a pas de grand champion qui n'ait causé de tort à personne.
c. Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée.

.... Corrigé ....

• Phrase (a) :
Procédons en essayant de faire apparaître des propriétés indépendantes :

Quand quelqu'un $\overbrace{\text{fait confiance à quelqu'un qui } \underbrace{\text{a trompé tout le monde}}_{\Psi}}^{\Phi}$, il a tort

— Premier niveau : *Quand quelqu'un* Φ*, il a tort*
— l'indéfini *quelqu'un* combiné avec la conditionnelle a une valeur universelle

$$\forall x\ ((Px \wedge \Phi x) \rightarrow Tx)$$

— Deuxième niveau : $\Phi x = x$ *fait confiance à quelqu'un qui* Ψ
— ambiguïté : *quelqu'un* peut être lu existentiellement ou universellement.

$$\exists y\ ((Py \wedge \Psi y) \wedge C(x, y))$$

$$\forall y\ ((Py \wedge \Psi y) \rightarrow C(x, y))$$

— Troisième niveau : $\Psi y = y$ a trompé tout le monde

$$\forall z\ (Pz \rightarrow Tr(y, z))$$

Si on met tout ensemble, cela donne :

$$\forall x\ \Big(\big(Px \wedge \exists y\ \big((Py \wedge \forall z\ (Pz \rightarrow Tr(y, z))) \wedge C(x, y) \big) \big) \rightarrow Tx \Big)$$

• Phrase (b) : deux formules équivalentes (il y en a d'autres)

$$\neg\exists x\ (GCx \wedge \neg\exists y\ (Py \wedge CT(x,y)))$$

$$\neg\exists x\ (GCx \wedge \forall y\ (Py \rightarrow \neg CT(x,y)))$$

• Phrase (c) : on peut discuter sur le *ou* (inclusif ou exclusif)

$$\forall x\ (Px \rightarrow (Ox \vee Fx))$$

/