Exercice 1

Traduire, le plus simplement possible, en langue naturelle les formules suivantes, sachant que
p = Jean est heureux
q = Jean chantonne
r = Jean énerve sa voisine

(1) a. $q \to p$
b. $q \to r$
c. $\neg p \to q \to r$

Corrigé

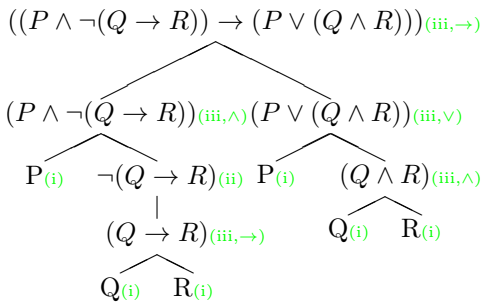
a. Quand il chantonne, Jean est heureux.
b. Quand Jean chantonne, il énerve sa voisine.
c. La formule $\neg p \to q \to r$ est ambiguë. Il faut donc commencer par la désambiguïser. Il y a cinq possibilités :

1. $(\neg p \to (q \to r))$: Quand Jean n'est pas heureux, s'il chantonne, il énerve sa voisine.
2. $((\neg p \to q) \to r)$: Si Jean chantonne quand il n'est pas heureux, il énerve sa voisine.
3. $(\neg(p \to q) \to r)$: S'il n'est pas vrai que Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
4. $\neg((p \to q) \to r))$: Il n'est pas vrai que si Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
5. $\neg(p \to (q \to r))$: Il n'est pas vrai que si Jean est heureux, il énerve sa voisine lorsqu'il chantonne.

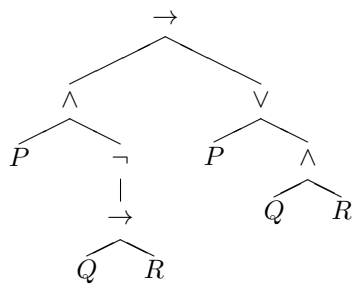
Exercice 2

Montrez que la formule suivante est une formule bien formée du calcul propositionnel en donnant son arbre de décomposition : $((P \wedge \neg(Q \to R)) \to (P \vee (Q \wedge R)))$.

Corrigé



version plus légère :

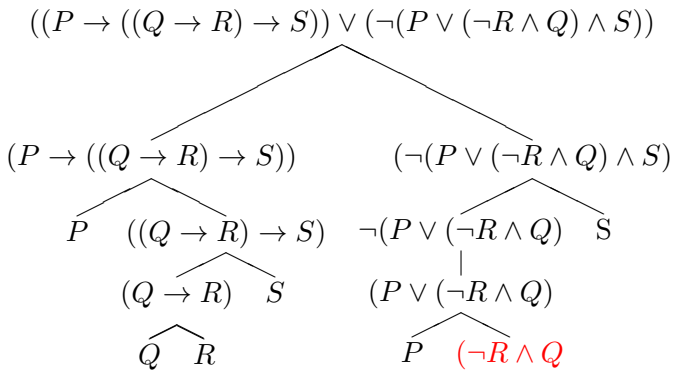


Exercice 3

L'expression $((P \to ((Q \to R) \to S)) \vee (\neg(P \vee (\neg R \wedge Q) \wedge S))$ est-elle une formule bien formée de la logique des propositions ? Justifiez votre réponse avec un arbre de décomposition.

Corrigé

Cette expression n'est pas une formule bien formée. En effet, elle contient l'expression en rouge dans l'arbre ci-dessous, qui n'est pas une formule bien formée.

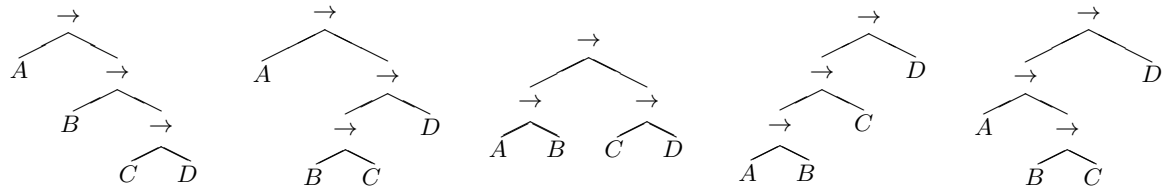


Exercice 4

Soit l'expression $A \to B \to C \to D$. Quelles sont les formules bien formées que l'on peut obtenir en plaçant des couples de parenthèses ? Donnez l'arbre de décomposition de deux des formules obtenues.

Corrigé

Si on prend comme signe principal la première flèche, on a deux possibilités. Si on prend la seconde flèche, il n'y a qu'une possibilité, si on prend la troisième, on a deux possibilités (symétriques). Cela donne, avec une notation simplifiée des arbres syntaxiques :



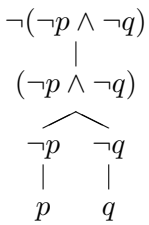
$(A \to (B \to (C \to D)))$ $(A \to ((B \to C) \to D))$ $((A \to B) \to (C \to D))$ $(((A \to B) \to C) \to D)$ $((A \to (B \to C)) \to D)$

Exercice 5

Considérer la formule (2). Représenter son arbre de décomposition. Au vu de cet arbre, quels sont les différents ordres possibles de calcul des colonnes de la table composite ?

(2) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

Corrigé



Beaucoup d'ordres possibles pour les 4 colonnes p, q, $\neg p$, $\neg q$, avec la seule contrainte que p soit déterminé avant $\neg p$, et q avant $\neg q$. Pour le reste, la dernière colonne calculée est la racine de l'arbre.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Exercice 6

Pour les deux phrases suivantes, proposer une phrase contradictoire, et une phrase contraire (non contradictoire).

(3) a. Max est en retard et Marie est en avance
b. Max est en retard ou Marie est en avance

Corrigé

(1a) Max est en retard et Marie est en avance

Contradictoire Il n'y a qu'une proposition contradictoire possible (qui peut s'exprimer de plusieurs façons)

(4) a. Il est faux que Max est en retard et Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{ou}$ Marie n'est pas en avance

Contraire De nombreuses possibilités, formées soit en utilisant les même propositions (et leur négation) soit en utilisant d'autres propositions incompatibles. [1]

(5) a. Max n'est pas en retard et Marie n'est pas en avance
b. ≠ Max est en retard et Marie n'est pas en avance
c. ≠ Max est à l'heure
d. ≠ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

(1b) Max est en retard ou Marie est en avance

Contradictoire Une seule proposition contradictoire (exprimée de plusieurs façons)

(6) a. Il est faux que Max est en retard ou Marie en avance
b. = Max n'est pas en retard $\boxed{et}$ Marie n'est pas en avance
c. = Max n'est pas en retard, ni Marie en avance

Contraire De nouveau plusieurs possibilités (et certaines sont aussi contraires à (1a))

(7) a. Max est à l'heure et Marie est à l'heure
b. ≠ Max est en retard et il n'est pas en retard [2]
c. ≠ Max est en avance et Marie est en retard
d. ≠ Max et Marie sont à l'heure
e. ...

1. On admettra que *ne pas être en retard* n'est pas équivalent à *être en avance* : on peut aussi *être à l'heure*.
2. Cette proposition est toujours fausse, donc en particulier elle ne peut pas être vraie quand (1b) l'est...