Exercice 1

Donnez trois exemples de phrases qui ne sont pas des propositions.

..........Corrigé..........

Phrases qui ne sont pas des propositions :

(1) a. Va !
 b. Viendras-tu demain ?
 c. Pourquoi tant de haine ?
 d. Aïe !
 e. Quelle belle robe !

Il y a controverse pour les deux derniers cas, car il est relativement facile d'elliciter le contenu propositionnel exprimé par les interjections et les exclamatives.

Exercice 2

Pour chacun des cas suivants, proposez deux exemples (différents de ceux qui ont été présentés en cours).
— proposition complexe comprenant au moins trois propositions simples.
— proposition singulière avec un sujet pluriel.
— proposition thétique.
— proposition universelle négative

..........Corrigé..........

— proposition complexe comprenant au moins trois propositions simples.
 S'il pleut et que le vent est fort, la route est sèche.
— proposition singulière avec un sujet pluriel.
 Luce et Lucas sont endormis.
— proposition thétique.
 Il vente.
— proposition universelle négative.
 Aucun de mes amis n'est vacciné.

Exercice 3

Donnez deux exemples de phrases qui ne sont pas des propositions, et deux exemples de propositions qui ne sont pas des phrases simples.

.... Corrigé ....

Phrases qui ne sont pas des propositions :

(2) a. Sortez immédiatement !
b. Tu as trouvé ces chaussures dans quelle boutique ?

Les ordres (souvent exprimés par des phrases à l'impératif), et les questions (exprimées le plus souvent par des phrases interrogatives), sont des phrases auxquelles on ne peut attribuer une valeur de vérité, ce ne sont pas des propositions. Le cas des phrases exclamatives, des interjections et des insultes est plus discuté (3). Elles peuvent être considérées comme des propositions, si on restitue le contenu implicite : ici par exemple *[tu es un] imbécile !*.

(3) Imbécile !

Propositions qui ne sont pas des phrases simples : toutes les propositions complexes sont formées à partir de plusieurs phrases simples et ne sont donc pas elles-mêmes des phrases simples. Par exemple, (4).

(4) a. Si tu n'as pas compris, tu n'auras pas la moyenne.
b. Il faut avoir un badge ou connaître le code pour entrer dans le bâtiment.

Attention : les phrases comme (5) sont en général traduites en logique sous la forme d'une conjonction ou d'une disjonction de propositions (une « formule complexe », si l'on veut), mais du point de vue grammatical, il s'agit quand-même de phrases simples, en ce sens qu'elles ne sont pas composées de plusieurs propositions syntaxiques.

(5) a. Pierre est un architecte travailleur et efficace.
b. Les prochains jeux olympiques se dérouleront à Paris ou à Londres.

Exercice 4

Pour chacune des phrases suivantes, identifiez les propositions élémentaires qui la constituent, et proposez une "reformulation" au moyen des connecteurs *et*, *ou* et *si* et de la négation.
Exemple : *Lucas est actif et brouillon.* comprend deux propositions : (1) Lucas est actif, et (2) Lucas est brouillon. La phrase peut être reformulée en '*Lucas est actif et Lucas est brouillon*'.

(6) a. L'infirmier est malade ou en retard.
b. Sam et Pam se sont mariés.
c. Sam et Pam aiment les animaux.
d. Luce est en retard mais si Annie est là, on va pouvoir ouvrir la porte.
e. Tu n'es ni mon ami ni mon ennemi.
f. Si tu as la moyenne, tu valides l'année, mais tu peux valider l'année sans avoir la moyenne.

. . . . Corrigé . . . .

(7) a. L'infirmier est malade ou en retard.
P = l'infirmier est malade ; Q = l'infirmier est en retard
Reformulation : L'infirmier est malade $\boxed{\text{ou}}$ l'infirmier est en retard.
Formellement : $(P \vee Q)$

b. Sam et Pam se sont mariés.
On a ici comme souvent une ambiguïté lexicale : (A) le verbe *se marier* peut-être vu comme un prédicat collectif dont le sujet est nécessairement pluriel (*se marier* = *se marier ensemble*) — dans ce cas la proposition ne peut pas être décomposée car le fait de se marier ensemble est plus que la conjonction des deux propositions "x s'est marié" ; (B) le verbe peut-être lu de manière distributive : dans ce cas, la propriété de s'être marié est attribuée à chacun des deux sujets (que ce soit ensemble ou non) et on peut décomposer cette proposition en une conjonction de deux propositions élémentaires : *Sam s'est marié(e)* $\boxed{\text{et}}$ *Pam s'est marié(e).*

c. Sam et Pam aiment les animaux.
Le prédicat est forcément distributif ici : conjonction de deux propositions.

d. Luce est en retard mais si Annie est là, on va pouvoir ouvrir la porte.
Propositions élémentaires : *Luce est en retard* (L) ; *Annie est là* (A) ; *On va pouvoir ouvrir la porte* (P).
Luce est en retard $\boxed{\text{et}}$ $\boxed{\text{si}}$ Annie est là, $\boxed{\text{alors}}$ on va pouvoir ouvrir la porte
Formellement : $(L \wedge (A \rightarrow P))$

e. Tu n'es ni mon ami ni mon ennemi.
Prop. élémentaires : tu es mon ami ; tu es mon ennemi.
Reformulation : $\boxed{\text{Il est faux que}}$ tu es mon ami $\boxed{\text{et}}$ $\boxed{\text{il est faux que}}$ tu es mon ennemi.

f. Si tu as la moyenne, tu valides l'année, mais tu peux valider l'année sans avoir la moyenne.
Formulation un peu plus explicite : si tu as la moyenne, alors tu valides l'année, mais il n'est pas vrai que si tu n'as pas la moyenne, tu ne valides pas l'année.
$\boxed{\text{si}}$ tu as la moyenne, $\boxed{\text{alors}}$ tu valides l'année $\boxed{\text{et}}$ $\boxed{\text{il est faux que}}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{il est faux que}}$ tu as la moyenne $\boxed{\text{alors}}$ $\boxed{\text{il est faux que}}$ tu valides l'année.
$((M \rightarrow V) \wedge \neg(\neg M \rightarrow \neg V))$

Exercice 5

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase correspond chaque variable propositionnelle.

(8) a. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
b. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient.
c. Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
d. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
e. Jean ne viendra que si Paul ne vient pas.
f. Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi.

.... Corrigé ....

(9) a. Ce moteur n'est pas bruyant, mais il consomme beaucoup.
P = « ce moteur est bruyant » ; Q = « ce moteur consomme beaucoup »
$(\neg P \wedge Q)$

b. Il n'est pas vrai que Pierre viendra si Marie ou Jean vient.
P = « Pierre vient » ; Q = « Marie vient » ; R = « Jean vient »
Cette phrase est ambiguë. Elle peut s'interpréter comme $\neg((Q \vee R) \to P)$ ou comme $((Q \vee R) \to \neg P)$;

c. Jean n'est pas seulement stupide, mais il est aussi méchant.
P = « Jean est stupide » ; Q = « Jean est méchant »
$(P \wedge Q)$

d. Je vais à la plage ou au cinéma à pied ou en voiture.
P = « Je vais à la plage à pied » ;
Q = « Je vais à la plage en voiture » ;
R = « Je vais au cinéma à pied » ;
S = « Je vais au cinéma en voiture »
$(P \vee Q \vee R \vee S)$; variante ($\veebar$ = "ou exclusif") : $(P \vee Q) \wedge (R \veebar S)$

e. Jean ne viendra que si Paul ne vient pas.
P = « Jean viendra » ; Q = « Paul vient »
La négation complique les choses. Raisonnons avec un autre exemple : « Jean ne viendra que s'il fait beau »

4 cas : Jean vient et il fait beau		Donc ici, c'est 'jean vient'
Jean vient et il ne fait pas beau	FAUX !	
Jean ne vient pas et il fait beau		
Jean ne vient pas et il ne fait pas beau		

$\to$ 'il fait beau' Si on revient à la phrase initiale, on a : $(P \to \neg Q)$

f. Si tu ne m'aides pas quand j'ai besoin de toi, je ne t'aiderai pas quand tu auras besoin de moi.
Une traduction possible est $(\neg P \to \neg Q)$.
P = « tu m'aides quand j'ai besoin de toi » ;
Q = « je t'aide quand tu as besoin de moi »
On peut aussi considérer les deux *quand* comme des *si*. La traduction est alors $((Q \to \neg P) \to (S \to \neg R))$.
P = tu m'aides ;
Q = j'ai besoin de toi ;
R = je t'aide ;
S = tu as besoin de moi

Exercice 6

Traduire, le plus simplement possible, en langue naturelle les formules suivantes, sachant que
p = Jean est heureux
q = Jean chantonne
r = Jean énerve sa voisine

(10) a. $q \rightarrow p$
b. $q \rightarrow r$
c. $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$

.... Corrigé ....

a. Quand il chantonne, Jean est heureux.
b. Quand Jean chantonne, il énerve sa voisine.
c. La formule $\neg p \rightarrow q \rightarrow r$ est ambiguë. Il faut donc commencer par la désambiguïser. Il y a cinq possibilités :

1. $(\neg p \rightarrow (q \rightarrow r))$: Quand Jean n'est pas heureux, s'il chantonne, il énerve sa voisine.
2. $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow r)$: Si Jean chantonne quand il n'est pas heureux, il énerve sa voisine.
3. $(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow r)$: S'il n'est pas vrai que Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
4. $\neg((p \rightarrow q) \rightarrow r))$: Il n'est pas vrai que si Jean chantonne quand il est heureux, il énerve sa voisine.
5. $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r))$: Il n'est pas vrai que si Jean est heureux, il énerve sa voisine lorsqu'il chantonne.

Exercice 7

Traduire, aussi précisément que possible, les phrases suivantes en logique propositionnelle. Indiquer à quelle phrase simple correspond chaque variable propositionnelle.

(11) a. Pierre et Marie sont venus, alors que Paul non.
b. Il est faux que Paul est venu.
c. Jean et Marie ne viendront que si le métro fonctionne
d. Jean viendra, à moins bien sûr que Marie ne vienne pas

Corrigé

P	: Pierre est venu	P	: Jean viendra
Q	: Marie est venue	Q	: Marie viendra
R	: Paul est venu	R	: Le métro fonctionne
(1a)	: $P \wedge Q \wedge \neg R$	(1c)	: $P \wedge Q \rightarrow R$
(1b)	: $\neg R$	(1d)	: $P \leftrightarrow Q$

Jean et Marie viennent $P \wedge Q$	le métro fonctionne R	(1c)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Jean vient P	Marie vient Q	(1d)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercice 8

Pour chacune des phrases suivantes, proposez une formule de logique des propositions ayant les mêmes conditions de vérité. On précisera soigneusement la proposition associée à chaque symbole.

(12) a. Ni Jean ni Marie ne possèdent de voiture.
b. Bien que Paul soit malade, il est parti en vacances.
c. Jean veut à la fois une bicyclette et un train électrique, mais il n'aura ni l'un ni l'autre.
d. Pour que la fête réussisse, il suffit que Paul soit invité.

Corrigé

(13) a. Ni Jean ni Marie ne possèdent de voiture.
$(\neg J \wedge \neg M)$, avec J = Jean possède une voiture, M = Marie possède une voiture
b. Bien que Paul soit malade, il est parti en vacances.
$(M \wedge V)$, avec M = Paul est malade, et V = Paul est parti en vacances
c. Jean veut à la fois une bicyclette et un train électrique, mais il n'aura ni l'un ni l'autre. $(Jb \wedge Jt \wedge (\neg Ab \wedge \neg At))$,
avec Jb = Jean veut une bicyclette, Jt = Jean veut un train électrique, Ab = Jean aura une bicyclette, et At = Jean aura un train électrique
d. Pour que la fête réussisse, il suffit que Paul soit invité.
$(I \rightarrow R)$, avec I = Paul est invité, R = la fête réussit

Exercice 9

Traduire la phrase suivante en logique des propositions.

(14) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

.... Corrigé ....

(15) Quand Paul ou Marie arrive en avance et que la porte est fermée, ils frappent chez Jean si ce n'est pas trop tard.

Une première décomposition, syntaxique « de surface », pourrait faire apparaître les propositions suivantes.

— Paul ou Marie arrive en avance : α
— La porte est fermée : β
— Ils frappent chez Jean : γ
— Ce n'est pas trop tard : δ

Avant de les décomposer, on peut essayer de se figurer la structure globale de la formule avec ces propositions. La phrase se ré-écrit (16-a). Si on traduit *quand* comme *si*, *et* par $\wedge$, et « a si b » par $b \rightarrow a$, cela donne (16-b) (parenthèses externes omises pour la lisibilité), ce qui est équivalent à (16-c).

(16) a. Quand α et β, γ si δ.
b. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\delta \rightarrow \gamma)$
c. $(\alpha \wedge \beta \wedge \delta) \rightarrow \gamma$

Mais il faut maintenant décomposer les propositions au sens grammatical en propositions au sens logique. Pour α, on est dans un cas courant où la disjonction sur le sujet correspond à une disjonction de deux propositions : $\alpha = P \wedge M$. La proposition β ne peut pas être plus décomposée. Appelons-la F. La proposition δ comprend une négation, soit $\delta = \neg T$.

Considérons maintenant la proposition γ. Elle comprend un pronom, qui se comporte un peu comme une variable. Autrement dit, γ n'a pas de valeur de vérité tant que n'est pas explicité le référent du pronom. Les possibilités sont les suivantes (P_j dénote *Paul frappe chez Jean*, et M_j dénote *Marie frappe chez Jean*).

— *ils = Paul* ***et*** *Marie*. (16) se traduit : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \wedge M_j))$
C'est trop fort par rapport à la phrase initiale.
— *ils = Paul* ***ou*** *Marie*. On a alors : $((P \vee M) \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow (P_j \vee M_j))$
Cette fois, c'est trop faible (c'est vrai si c'est Paul qui arrive en avance et Marie qui frappe chez Jean), mais on peut éventuellement considérer que le renforcement du sens (c'est celui qui arrive en avance qui frappe à la porte) est dû à un effet pragmatique.
— *ils = celui (parmi Jean et Marie) qui est arrivé en avance*. Dans ce cas, il faut modifier la structure globale de la formule :
$((P \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow P_j)) \vee ((M \wedge F) \rightarrow (\neg T \rightarrow M_j))$